SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

3

GODINA VII.
ZAGREB
1956 — 57

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
Pretplata za 4 broja iznosi Din 200. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 40-KB-2-Ž-1884 — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

	Strana
Deduš Vladimir, O radanju atomske fizike	89
Penzar Ivo, dr. Andrija Mohorovičić (u povodu 100-god. rođenja)	93
Петровић Владимир, Запремина произвољног тетраедра као функција његових ивица	96
Rozgaj dr. Slavko, Masa Zemlje i paralaksa Sunca	98
Златковић Симеон, Неке примене комплексног броја у тригонометрији и аналитичкој геометрији	101
Rauter Aleksander, Težišče trikotnika najdeno z limitnimi procesi	107
Zanimljivosti i razno: János Bolyai. — Kako se računa $\sqrt[n]{A}$. — O školovanju Nikole Tesle u Rakovcu. — Izražavajmo se precizno.	112
Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike. — B. Zadaci iz fizike. — C. Rješenja zadataka iz matematike. — D. Rješenja zadataka iz fizike.	112
Vježbe iz matematike za učenike viših razreda gimnazije . .	122
Vježbe iz matematike za prijemni ispit	125
Rješenje križaljke iz br. 2 i nagrađeni rješavatelji	128
Iz uredništva	128

Uređivački odbor:

ĆAHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
JOVANOVIĆ PETAR, prof. VPŠ, Cetinje
KRAJNOVIĆ MILAN, profesor, Zagreb
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
SINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb
VERNIĆ ELZA, profesor, Zagreb

Glavni urednici:

Dr. MARKOVIĆ BRANIMIR, docent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Zagreb
ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VII. BROJ 3 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1956. — 1957.

O rađanju atomske fizike

(POVODOM 50-GODIŠNJICE SMRTI PIERRE-a CURIE-a)

VLADIMIR DEDUŠ, Zagreb

Iz dana u dan čitamo o brojnim saobraćajnim nesrećama po cijelom svijetu. Mislimo, da su krivci toj pojavi motorna vozila. No prije 50 godina, točnije 19. travnja 1906. g., teška su teretna kola, koja su vukli konji, bila uzrok saobraćajne nesreće, koja je nanijela golem gubitak tadanjoj nauci. U toj je nesreći bio žrtva *Pierre Curie* (Pijer Kiri), *francuski fizičar, jedan od utemeljitelja nauke o sastavu atoma, dakle atomske fizike.* A prva otkrića, koja znače upravo uvod u proučavanje zbivanja unutar atoma, nastala su 10 godina ranije, t. j. g. 1896. Tako postoji dvostruki povod da svratimo svoju pažnju na to razdoblje. S tim ćemo lakše moći da ocijenimo, kolik je put prešla nauka o sastavu atoma za tih 60 godina. Ujedno ćemo u najskromnijoj mjeri pokušati da vraćamo dug zahvalnosti svega čovječanstva ne samo jednom od pionira današnjeg atomskog doba, kojemu početak doživljavamo, nego i velikom dobrotvoru cijeloga čovječanstva i velikom čovjeku, koji se imao rad šta i roditi.

Fizičarima se već više puta dogodilo, da su ispitujući jednu pojavu otkrili drugu sasvim neočekivanu i neslućenu. Tako je Röntgen htio proučavati pojave fluorescencije katodnih zraka, pa je otkrio nove zrake, senzacionalnih upravo svojstava, koje su kasnije dobile njegovo ime. No u nauci redovito rješavanje jedne zagonetke u prirodi postavlja nove, koje treba onda rješavati. I otkriće rentgenskih zraka odmah je postavilo pitanje: kako nastaju i što su zapravo? Na drugo je pitanje nauka dala potpun odgovor tek poslije 17 godina, ali je odmah krajem 1895. i početkom 1896. g. više fizičara počelo ispitivati, kako nastaju rentgenske zrake. Neki su i njih smatrali pojavom fluorescencije. Tako se naime zove pojava, da neke tvari, prethodno izložene svjetlosti izvjesne boje, poslije toga obasjavanja i same svijetle, samo je boja njihove svjetlosti različna od boje svjetlosti, kojoj su bile izložene (naziv potječe od imena elementa fluora, na kojem je ta pojava otkrita, i od latinske riječi nascor = rađam). Učenjaci su mislili, da rentgenske zrake nastaju na staklu katodne cijevi, gdje o nju udaraju katodne zrake. Nastalo je pitanje, da li postoji još koja mogućnost da se fluorescencijom proizvedu rentgenske zrake. Francuski fizičar Becquerel (Bekerel) je pravio pokuse s jednim komadićem rude, koja je sadržavala elemenat uran. On je taj komadić stavljao na fotografsku ploču, zavijenu u crni papir, neproziran za obično svijetlo. Prethodno je rudu izložio sunčanoj svjetlosti. Mislio je: ako se na fotografskoj ploči pokaže

svjetlosni učinak, kad na nju položi spomenutu rudu, bit će to dokaz, da iz rude izlaze zrake jednake rentgenskima, koje također prolaze kroz crni papir, kao i kroz druge tvari, neprozirne za obično svijetlo. No krajem veljače g. 1896. bilo je i nekoliko dana vrlo tmurno vrijeme, nije bilo sunca, pa je Becquerel spremio fotografsku ploču u ormar i bez posebne namjere na nju stavio i uranovu rudu. Kad je 1. ožujka htio da ponavlja svoje pokuse i htio da opet uranovu rudu izloži sunčanoj svjetlosti, pregleda najprije fotografsku ploču. Kako se začudio, kad je vidio na ploči vrlo jake obrise rude. To je značilo, da iz uranove rude same izbijaju zrake srodne rentgenskima, bez prethodnoga obasjavanja rude drugom svjetlošću i da je njihovo trajanje mnogo dulje nego kod prije poznatih pojava fluorescencije.

Doskora je Becquerel otkrio, da te zagonetne zrake izbijaju elektricitetom nabijeni elektroskop. Te su zrake bila prva vijest, koju je nauka primila o zbivanjima u atomu.

Becquerel je za te pojave zainteresirao svoje prijatelje. Bio je to mladi bračni par: *Pierre Curie* i *Marija* rođena *Sklodowska,* Poljakinja, oboje fizičari. P. Curie je već bio poznat kao istaknuti naučni radnik i izvan svoje domovine, po svojim istraživanjima. Naročito mu je značajna konstrukcija jednog elektrometra (aparata za mjerenje vrlo neznatnih količina elektriciteta). Taj je aparat osobito bio koristan u doskorašnjim istraživanjima supruga Curie. Rođen g. 1859. u naprednoj, liječničkoj porodici, odgojen u sasvim naprednom duhu, živio je samo za svoj naučni rad. Vrlo kulturan i svestrano obrazovan, i skroman, bolje reći kritičan prema sebi, i ponosan, nije uza sve svoje naučne uspjehe mogao doći — što no riječ — na zelenu granu, jer nije htio da obija pragove vlastodržaca.

Marija Curie je upravo tražila predmet ispitivanja za svoj doktorski rad, kad ih je Becquerel upoznao sa svojim otkrićima. U saglasnosti sa svojim mužem ona se odluči na istraživanje pojava, koje je otkrio Becquerel.

Ali kad je počela tražiti mjesto za svoja istraživanja, nije nigdje u Parizu, ni u jednoj naučnoj ustanovi, mogla dobiti kutić za svoj rad. Jedva jedvice joj muž izradi dopuštenje da radi u jednoj prizemnoj prostoriji škole, gdje je on bio namješten kao nastavnik. Bilo je to neko skladište, puno kojekakvih strojeva, vlažno. Ona mora sama da nabavlja sve aparate za istraživanja. Prostorija se ne može zagrijati i mlada žena radi češće uz temperaturu od 6—7 stupnjeva. Taj rad traje do ljeta 1898. P. Curie ne surađuje izravno sa ženom, ali prati njezin rad i svojim većim iskustvom joj pruža dragocjenu pomoć.

Što radi Marija Curie? Becquerel je otkrio, da »njegove« zrake izbijaju elektroskop. To znači, da one ionizuju uzduh, cijepaju neelektrične molekule sastavnih dijelova uzduha u električne njihove sastojine, t. zv. ione. Marija Curie najprije mjeri snagu ionizacije zraka, koje izašilju uranove rude. Za ta se mjerenja služi izumima svoga muža. Doskora nalazi, da jakost ili intenzitet toga zračenja zavisi samo o količini urana, sadržanog u rudi. A te zrake izbijaju iz urana neprekidno i nikakav zahvat čovjeka ih ne može zaustaviti niti promijeniti njihovu jakost. No Marija Curie pita: *da li samo uran ima ta svojstva, koja ona nazivlje radioaktivnima?* Odmah počinje istraživati sve tada poznate kemijske elemente, njih preko 70. I nalazi, da i rude, koje sadrže elemenat torij, također izašilju zrake poput uranovih. Sad se M. Curie laća novoga posla: ispitat će sve primjerke ruda u zbirci škole, u kojoj radi njezin muž, da utvrdi, koje su od njih radioaktivne.

Očekuje, da će naći radioktivna svojstva kod onih ruda, koje sadrže uran i torij, kod drugih ne. Ali kojeg li iznenađenja! M. Curie otkriva, da neke rude sa uranovom ili torijevom sadržinom pokazuju mnogo jači stepen radioaktivnosti nego to odgovara količini urana odnosno torija u njima. Zar je pogrešno mjerila? Ponavlja ista mjerenja 10—20 puta, rezultat je isti. Što to znači? Mladi učenjak zaključuje: *u tim rudama postoji bar još jedan nepoznati elemenat,* koji je izvor zračenja. 12. travnja 1898. na sjednici francuske akademije akademik Lippman saopćio je mišljenje Marije Curie Sklodowske, da u dvije uranove rude postoji vjerojatno jedan novi još nepoznati kemijski elemenat, koji je izvor jakog radioaktivnog zračenja, jer ono ne potječe ni od jednog poznatog elementa.

Pierre Curie je dosad samo savjetima pomagao istraživanja svoje žene. Sad prekida svoja naučna istraživanja, da u buduće radi s njom.

Treba dokazati postojanje toga kemijskoga elementa na način uobičajen u kemiji. Treba dakle izdvojiti taj elemenat u količini, koja će omogućiti, da se odredi atomska i specifična težina njegova, da se prema svojstvima odredi položaj u sustavu elemenata. Činjenica, da dotad nije nitko u poznatim inače uranovim rudama otkrio taj novi elemenat dokazuje, da se on nalazi u njima u neznatnoj količini. Bit će dakle težak zadatak za dva fizičara da dobiju novi elemenat u čistom stanju i u količini, dovoljnoj za vaganje.

Jedna od ruda, koje su vjerojatno sadržavale novi elemenat, bijaše *uranov smolinac.* Supruzi Curie su računali, da će novi elemenat tvoriti jednu stotninu rude. Da li bi se bili upustili u njegovo izdvajanje iz rude, da su znali unapred, da on tvori tek jednu milijuntinu rude?

Mjereći stepen radioaktivnosti pojedinih dijelova smolinca otkrivaju supruzi Curie, da se njegova dva dijela ističu osobito jakim radioaktivnim zračenjem. Zaključak: *postoje dva nepoznata još radioaktivna elementa.* Istraživači su bili tako sigurni, da je njihovo zaključivanje pravilno, da su tim elementima već tokom g. 1898. dali imena: *polonium* i *radium.*

Bračni par P. i M. Curie je sad morao da riješi tri zadatka. 1. Nabaviti dovoljnu količinu uranova smolinca, jer je bilo očito, da je novi elemenat sadržan u njemu u silno malenoj količini. 2. Treba naći laboratorij odnosno prostoriju za taj rad. 3. Odakle sredstva za namirenje izdataka spojenih s tim radom?

Uranov smolinac je skup. *Ali tražene elemente moraju sadržavati i otpaci, iz kojih je već izvađen uran.* Ti će ipak biti jeftini. Posredovanjem prijatelja dobiju supruzi Curie od državnog rudnika u Jachimovu, tada u Austriji, a danas u ČSR, jednu tonu otpadaka uranova smolinca besplatno. Samo moraju platiti troškove prevoza u Pariz. Supruzi Curie niti ne pomišljaju na kakvu pomoć od francuske države. Iz svojih malenih ušteđevina plaćaju prevoz. Ali kamo? Sve obijanje pragova naučnih zavoda po cijelom Parizu je ostalo bez uspjeha, za supruge Curie nije bilo nigdje mjesta. Konačno dobiju u dvorištu škole, gdje je i dosada vršila svoje istraživačke radove M. Curie, jednu već napuštenu drvenu baraku sa staklenim krovom, kroz koji je curila kiša. Nekad su u njoj čuvali lješine za seciranje na medicinskom fakultetu; sad već nije bila ni zato. U njoj je bio zemljan pod prekriven tankim slojem asfalta, nekoliko starih rasklimanih kuhinjskih stolova, željezna peć sa zarđalom dimnom cijevi, prastara školska ploča i — ništa više.

U to čudo od laboratorija dovezoše jednog dana g. 1898. teretna kola jednu tonu otpadaka uranova smolinca. I započe naučni rad, koji će značiti revoluciju u fizici i kemiji, a zatim i revoluciju i u tehnici. Uslovi rada? Ljeti nesnosna vrućina, zimi ne znaš što je gore. Kad je oštra studen, tad ne pada kiša u »laboratorij« na stolove i na aparate, ali se koče prsti od studeni! Jer peć grije samo do udaljenosti od jednog metra. Najviše radova treba obavljati napolju i za najveće studeni, jer se razvijaju štetni plinovi vrlo neugodna zadaha, a ventilacije nema u baraci nikakve.

Pa ipak nazivlje Marija Curie kasnije četiri godine rada u toj baraci najljepšim razdobljem u zajedničkom životu toga para fizičara i svojim najljepšim dijelom života. Osim jednoga asistenta ili pomoćnika, također mladog fizičara, supruzi Curie nemaju nikakve pomoći ni otkud. Sve, i najteže i najgrublje tjelesne radove ,koje inače vrše radnici bez naučnih kvalifikacija, moraju obavljati supruzi Curie sami. U isto doba vrše oboje i svoje nastavničke dužnosti. Plaća, koju primaju za taj rad, mora dostajati i za namirenje izdataka za naučni istraživački rad.

Tokom tih četiriju godina supruzi Curie objelodaniše više puta plodove svog naučnog rada. On je potakao i više drugih fizičara u raznim zemljama u Evropi i u Americi na proučavanje radioaktivnih pojava. Međutim nije bila ona jedna tona otpadaka uranova smolinca dosta, morali su nabaviti još nekoliko tona. *Konačno im je uspjelo, da iza 45 mjeseci rada izdvoje jednu desetinu grama radijevoga klorida (spoj radiuma i klora). Drugi je jedan učenjak kasnije iz 15 tona otpadaka uranova smolinca dobio tri miligrama poloniuma.*

Supruzi Curie su već tokom svojih prvih istraživanja dobivali priznanja stranih učenjaka. Njihovi uspjesi u proučavanju radioaktivnih pojava tokom slijedećih godina donijeli su im još veća priznanja, a g. 1905. i najveće međunarodno naučno odlikovanje: Nobelovu nagradu, koju su dijelili s Becquerelom. Samo u domovini su najdulje čekali na priznanje i pomoć. Zato je P. Curie odbijajući ponuđen mu red »Legije časti« rekao, da njemu treba laboratorij za rad, a ne orden. Tek g. 1904. posta P. Curie profesor fizike na sveučilištu u Parizu, a slijedeće godine i član Francuske akademije.

Supruzi Curie su postali slavni, ali su teško podnosili očitovanja te slave: svečana primanja u njihovu čast, posjete znatiželjnika, ručkove, večere i sl. Često bi tada čeznuli za minulim danima, kad su bili nepoznati, ali i nesmetani u svom mirnom životu ispunjenom naučnim radom.

P. i M. Curie su pronašli poseban način za dobivanje radiuma iz uranova smolinca. Otkriće, da radioaktivne zrake razaraju stanice živih bića, otvorilo je izglede za njihovu upotrebu u liječenju raznih bolesti. Za to će trebati industrijska proizvodnja radiumovih tvari.

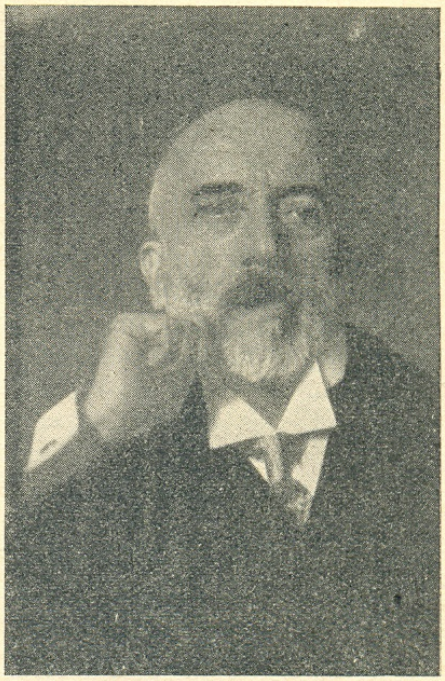
Supruzi Curie su mogli patentom zaštititi svoj postupak za dobivanje radiuma. Oni to nisu htjeli učiniti. Liječenje radiumom neka bude svojina cijeloga čovječanstva. Tako su se oni odrekli bogatstva u korist milijuna bijednih i bolesnih. Ali uzalud. Proizvodnja je radiuma postala predmet obogaćivanja industrijalaca i bankara, a radium lijek za bogataše, jer je doskora postao najskupljom tvari, mnogo skupljom od zlata. Ipak je odluka supruga Curie, da ne iskoriste plodove svog naučnog rada za svoje obogaćivanje, pa niti za namirenje troškova svojih daljnjih istraživanja, dokaz goleme čovjekoljubivosti, pa ih već i ona sama uzdiže u red velikih dobrotvora čovječanstva. A odlučnu je riječ u tom pitanju izrekao baš Pierre Curie.

Dr. Andrija Mohorovičić

23. I. 1857.—18. XII. 1936.

(U POVODU 100 GODIŠNJICE ROĐENJA)*

IVO PENZAR, Zagreb



Znatan broj naših naučenjaka iz raznih područja nauke pronijeli su ime naše domovine daleko izvan njenih granica. Vidno mjesto među njima zauzima naš slavni geofizičar dr. Andrija Mohorovičić. Danas nema ni jednog novog seizmičkog priručnika ili udžbenika, a skoro ni rasprave, u kojoj se ne bi spominjalo njegovo ime i njegov prilog ovoj relativno mladoj geofizičkoj nauci.

Rodio se 23. I. 1857. u Voloskom u Istri. Studij matematike i fizike završio je u Pragu. Nakon studija obavljao je kroz par godina nastavničke poslove i to najprije u Osijeku, a zatim u Bakru. 1891. imenovan je za upravitelja Meteorološkog opservatorija u Zagrebu, na kom položaju ostaje sve do odlaska u mirovinu 1921. U međuvremenu polaže doktorat filozofije, habilitira se najprije za docenta, a kasnije za profesora na Sveučilištu u Zagrebu i postaje član Jugoslavenske Akademije. Umro je 18. XII. 1936., ostavivši iza sebe velika djela na području meteorologije i seizmologije.

Meteorologijom se počeo baviti još kao srednjoškolski nastavnik u Bakru. Kako kod nas u ono vrijeme nije bilo mogućnosti za određivanje smjera i brzine gibanja zraka u slobodnoj atmosferi pomoću balona ili zmajeva, Mohorovičić nastoji pronaći metode, kojima bi se strujanje određivalo pomoću oblaka. Da se pak pronađu takve metode, trebalo je motriti naoblaku i utvrditi zakonitosti, koje tu vladaju. To je on i učinio. Niz je godina veoma sistematski promatrao oblake i određivao njihove oblike, visinu te smjer i brzinu kretanja. Utvrdio je dnevnu i godišnju periodu pojedinih vrsta oblaka, dao je formule za izračunavanje strujanja i neke nove poglede o načinu gibanja čestica zraka. Konstruirao je čak i poseban instrumenat za mjerenje smjera i brzine oblaka. Značajni su njegovi radovi na proučavanju neobičnih meteoroloških pojava u našim krajevima, koji se veoma rijetko javljaju, kao na pr. tornado.

Mnogo veće zasluge za meteorologiju kod nas ima Mohorovičić kao upravitelj meteorološkog opservatorija. Tu je u prvom redu opremio sam opservatorij meteorološkim instrumentima, a kvalitet meteoroloških motrenja uzdigao na veliku visinu. Nadalje mu je uspjelo osnovati čitav niz novih meteoroloških stanica diljem Hrvatske, a već postojeće stanice osnovane od bečke ili budimpeštanske meteorološke uprave pripojiti novostvorenoj mreži. Na taj način dobili smo poput ostalih naroda u Evropi dobro organiziranu meteorološku službu. Velika je zasluga Mohorovičića, što je pristupio izdavanju obrađenih meteoroloških podataka u obliku

* Svečana proslava 100-godišnjice rođenja Dr. A. Mohorovičića održana je u Društvu matematičara i fizičara NRH 23. siječnja 1957.

mjesečnih i godišnjih izvještaja, te naučnih publikacija, među kojima je prva bila njegova radnja o klimi Zagreba. Prikupljanje i štampanje meteoroloških izvještaja i klimatoloških podataka nastavljeno je od tada sve do današnjeg dana. Već je Mohorovičić započeo sa odašiljanjem naših meteoroloških publikacija u inozemstvo stranim ustanovama, od kojih je u razmjenu dobivao njihove radove. Tako je udarena osnova neobično korisnoj vezi sa stranim centrima, koja se iz godine u godinu sve više poboljšava. Na račun te veze naš je opsevatorij stvorio veoma bogatu geofizičku knjižnicu, koja po broju i sadržaju publikacija predstavlja jedinstvenost u našoj državi. S druge pak strane na račun te veze proširilo se ime zagrebačkog opservatorija daleko izvan granica naše domovine.

Pored meteorologije i klimatologije bavio se Mohorovičić daleko više seizmologijom. Njegov rad na tom području geofizike donio mu je velik ugled u naučnom svijetu.

Mohorovičićeva djelatnost na polju seizmologije započela je odmah čim je postavljen za upravitelja opservatorija (1891. god.) time, što je odmah od početka poveo akciju za nabavu dobrog seizmografa. Instrumenat, koji je naime bio postavljen godinu dana prije njegovog dolaska na opservatorij, nije se mogao upotrebljavati zbog svoje nepraktičnosti i netočnosti. U svojim nastojanjima uspio je Mohorovičić tek 1906., kad je 10. V. te godine proradio prvi valjan seizmograf u Hrvatskoj. Od tada do danas — a to se navršilo upravo 50 godina — imamo instrumentalne podatke o potresima. Kroz to vrijeme učinjena je bitna izmjena instrumenata. Tako je prvotni seizmograf tipa Vicentini-Konkoly tokom vremena napušten, a mjesto njega je 1908. postavljen osjetljiviji i u načinu bilježenja savršeniji Wiechertov astatički seizmograf, s masom od 80 kg i povećanjem od 20 puta, a 1909. još osjetljiviji seizmograf istog tipa s masom od 1000 kg. a povećanjem 200 puta. Time je zagrebački opservatorij izjednačen s ostalim boljim seizmičkim stanicama Srednje Evrope. Navedeni seizmografi prate sve pomake tla u vodoravnoj ravnini, pa se nazivaju horizontalni. Da se dobije slika o gibanju tla i u vertikalnom smjeru nastojao je Mohorovičić kompletirati opservatorij i jednim vertikalnim seizmografom. U tome nije potpuno uspio, ali ipak je još pri kraju njegova života, polovicom 1932., postavljen Wiechtertov vertikalni seizmograf s masom od 1300 kg. Tako je opservatorij dobio tri instrumenta, koji rade sve do današnjeg dana. Oni bilježe ne samo domaće potrese, nego i veoma daleke, pa i one, koji se javljaju čak blizu antipodne točke, što znači potrese sa cijele Zemlje. Žarišta do sada najudaljenijih potresa, zabilježenih u Zagrebu, udaljena su preko 19.000 km. U tih proteklih pola stoljeća zabilježeno je u Zagrebu blizu 10.000 potresa.

Ugled Mohorovičića u svijetu porastao je radom na analiziranju potresa, što su ih dali instrumenti na toj stanici. Analizom registracije određuje se vrijeme, kada je potres nastao i gdje mu je bio epicentar t. j. točka na Zemljinoj površini, koja se nalazi iznad žarišta potresa. Zatim se odredi njegova jačina i najveći pomak tla na stanici. Mohorovičić se specijalno pozabavio blizim potresima i došao do izvanrednih rezultata. Proučavajući širenje potresnih valova otkrio je nove zakone, koji su imali presudno značenje za dalji razvoj seizmike t. j. nauke o potresima.

Da bi lakše shvatili Mohorovičićeva epohalna otkrića, moramo se upoznati s nekim pojmovima iz seizmologije.

Prema postanku dijelimo potrese na slijedeće tri grupe: 1. Vulkanski potresi, koji nastaju prilikom vulkanskih erupcija. Žarište im je u području vulkana. Jakost im zna biti dosta velika, ali se ne osjećaju na većim udaljenostima, jer se javljaju u malim dubinama. Od ukupnog broja potresa, koji se javljaju, na vulkanske potrese otpada samo 7%.

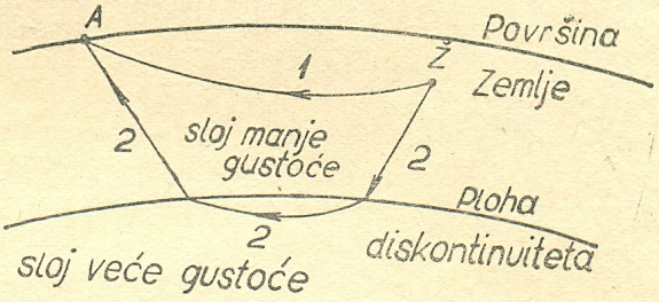
2. Ruševni ili urušni potresi, koji nastaju urušavanjem podzemnih šupljina. To su dosta slabi potresi i osjećaju se na malim područjima. Na njih otpada 3% od ukupnog broja potresa.

3. Tektonski potresi, koji nastaju geološkim procesima u većim dubinama Zemlje. Javljaju se uvijek onda, kad dolazi do lomljenja stijenja, klizanja jedne stijene pored druge i nabiranja stijena. To su veoma snažni potresi, a osjećaju se na golemim prostranstvima. Njih sačinjava preostalih 90% potresa.

Od hipocentra t. j. mjesta, gdje je nastao potres na jedan od tri navedena načina šire se potresni valovi na sve strane slično kao svjetlost od svog izvora. Brzina širenja potresnih valova ovisi o elastičnim svojstvima tvari, kroz koju prolaze. Ako se u smjeru širenja vala mijenjaju elastična svojstva tvari, mijenja se i brzina širenja valova. Tvar, kroz koju se šire potresni valovi, naša je Zemlja. Kako se gustoća Zemlje mijenja idući od površine prema unutrašnjosti, dolazit će i do promjene brzine širenja potresnih valova, kad se oni gibaju u smjeru prema unutrašnjosti Zemlje ili obratno.

Potresni valovi su dvojaki. Jedni su longitudinalni, a drugi transverzalni. U čvrstim tijelima šire se longitudinalni brže od transverzalnih, pa će oni u neko mjesto stići prije. Postoji dakle neka vremenska razlika između dolaska jednih i drugih valova. Ta vremenska razlika postaje sve veća i veća, što se više udaljujemo od ishodišta potresa. Ako nam je pak poznata ova razlika, može se iz nje naći udaljenost žarišta potresa. Spomenimo još, da se u seizmici prvi (longitudinalni) valovi nazivaju primae i obilježavaju sa P, a drugi (transverzalni) secundae i bilježe se sa S. Nakon P i S valova slijede t. zv. dugi valovi L i maksimalni valovi M. To su uglavnom površinski valovi i na njima se ne ćemo pobliže zadržavati.

Mohorovičić se mnogo bavio P valovima. On ih je ispitivao kod blizih potresa. Analizirajući tako potres od 8 .listopada 1909. sa žarištem u Pokuplju otkrio je, da postoje dvije vrste P valova. Jedne je nazvao individualnim primama $\bar{P}$, a druge normalnim primama P_n. Utvrdio je, da se obje vrste zapažaju samo na razmaku 200—700 *km* oko žarišta, a u većim udaljenostima da se zapažaju samo normalni P_n valovi.. Ovu pojavu protumačio je na slijedeći način. Iz žarišta potresa polaze longitudinalni valovi istodobno. Tu još između njih nema nikakve razlike. Kad bi gustoća Zemlje bila svuda jednolika, longitudinalni valovi bi se širili u svim smjerovima jednoliko i do razlike ne bi ni došlo. Međutim gustoća se Zemlje mijenja. U nekoj dubini postoji nagli skok gustoće, postoji ploha diskontinuiteta (vidi sliku 1.). Gornji sloj je rjeđi i sastoji se pretežno od silicija i aluminija, a donji je gušći, jer je sastavljen od silicija i magnezija. Valovi, koji se šire u gornjem sloju, idu sporije od valova, koji se šire donjim slojem. Zato će u točku A stići zraka 2 prije od zrake 1. Valovi, koji se šire u smjeru zrake 2 su normalne primae P_n, a valovi, koji idu smjerom zrake 1 su individualne primae $\bar{P}$. Iz slike odmah vidimo, da mjesta u blizini žarišta ne mogu imati obje vrste longitudinalnih valova, jer ih ne mogu dohvatiti zrake, koje se dva puta lome na plohi diskontinuiteta. Do njih dolaze samo individualne primae. Nadalje pak vidimo i to, da u većim daljinama od žarišta postoje samo normalne primae, jer ih zbog male dubine



površinskog sloja ne mogu dohvatiti zrake, koje se šire kroz taj sloj. Istraživanja su pokazala, da je prosječna dubina plohe diskontinuiteta u Evropi oko 57 *km*. U čast Mohorovičiću, koji ju je otkrio, prozvana je ta ploha Mohorovičićevim diskontinuitetom.

Mohorovičićevo otkriće plohe diskontinuiteta imalo je presudno značenje za dalji razvoj seizmike i dalo je nove mogućnosti za znanstveno istraživanje unutrašnjosti Zemlje. Zbog toga možemo s pravom Mohorovičića smatrati utemeljiteljem moderne seizmologije. Povodom njegove 100-godišnjice rođenja ugodna nam je dužnost sjetiti se ovih njegovih zasluga za razvoj nauke u svijetu i geofizike kod nas.

Запремина произвољног тетраедра као функција његових ивица

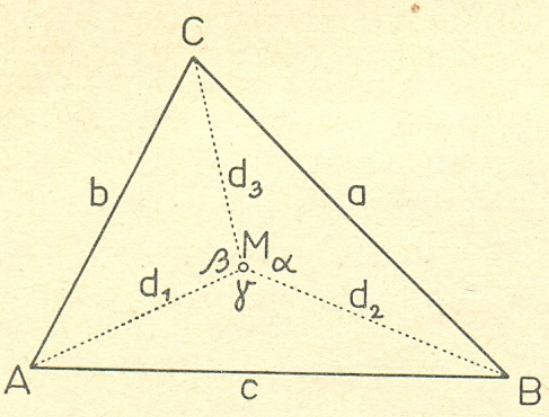
ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЋ, Ниш

Да бисмо изразили запремину произвољног тетраедра као функцију његових ивица, прво ћемо да одредимо релацију која постоји између међусобних отстојања четири произвољне тачке у равни.

Нека су A, B и C темена троугла, а M нека четврта произвољна тачка у истој равни (сл. 1). Уведимо следеће ознаке:

$$\left.\begin{array}{c} AB \equiv c,\ BC \equiv a,\ AC \equiv b,\ AM \equiv d_1,\ BM \equiv d_2,\ CM \equiv d_3 \\ \sphericalangle\, BMC \equiv \alpha,\ \sphericalangle\, AMC \equiv \beta,\ \sphericalangle\, AMB \equiv \gamma. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ако је тачка M у троуглу, тада је $\gamma = 360° - (\alpha + \beta)$ (2)



Сл. 1

А ако је на некој страни или ван троугла, тада је за разне положаје тачке M

$$\gamma = \beta \pm \alpha \quad \text{или} \quad \gamma = \alpha \pm \beta \quad (3)$$

Из (2) или (3) имамо да је $cos\,\gamma = cos\,(\alpha \pm \beta)$ односно $cos\,\gamma = cos\alpha\ cos\beta \mp sin\alpha\ sin\beta$ одакле је $\pm\, sin\alpha\ sin\beta = cos\alpha\ cos\beta - cos\gamma$ што после квадрирања за све случајеве постаје:

$$sin^2\alpha\ sin^2\beta = (cos\alpha\ cos\beta - cos\gamma)^2 \quad (4)$$

Обележимо површину троугла BCM са P_1, а троугла ACM са P_2. Из познатих тригонометриских образаца:

$$P_1 = \frac{d_2 d_3}{2} sin\alpha \quad \text{и} \quad P_2 = \frac{d_1 d_3}{2} sin\beta \quad \text{имамо}$$

$$sin\alpha = \frac{2P_1}{d_2 d_3} \quad \text{и} \quad sin\beta = \frac{2P_2}{d_1 d_3} \quad (5)$$

Из косинусне теореме, примењене на троугле BCM, ACM и ABM имамо

$$cos\alpha = \frac{d_2^2 + d_3^2 - a^2}{2 d_2 d_3}, \quad cos\beta = \frac{d_1^2 + d_3^2 - b^2}{2 d_1 d_3}, \quad cos\gamma = \frac{d_1^2 + d_2^2 - c^2}{2 d_1 d_2} \quad (6)$$

Сменом ових вредности тригонометриских функција из (5) и (6) у (4) — после ослобађања имениоца добићемо:

$$16 P_1^2 \cdot 16 P_2^2 = [(d_1^2 + d_3^2 - b^2)(d_2^2 + d_3^2 - a^2) - 2 d_3^2 (d_1^2 + d_2^2 - c^2)] \quad (7)$$

Ако површину неког троугла, чије су стране l, m и n, изразимо помоћу Хероновог обрасца, затим га квадрирамо, извршимо сва назначена множења и најзад га ослободимо од имениоца, добићемо:

$$16 P^2 = 2 l^2 m^2 + 2 l^2 n^2 + 2 m^2 n^2 - l^4 - m^4 - n^4 \quad (8)$$

Лева страна једнакости (7), после замене $16P_1^2$ и $16P_2^2$ одговарајућим вредностима помоћу обрасца (8) и сређивања по опадајућим степенима од d_3 постаје:

$$d_3^8 - 2d_3^6(b^2 + d_2^2 + a^2 + d_1^2) + d_3^4[4(b^2 + d_1^2)(a^2 + d_2^2) + (d_2^2 - a^2)^2 + (d_1^2 - b^2)^2] - \\ - 2d_3^2[(b^2+d_1^2)(d_2^2 - a^2)^2 + (a^2 + d_2^2)(d_1^2 - b^2)^2] + (d_1^2 - b^2)^2(d_2^2 - a^2)^2 \quad (9)$$

Десна страна исте једнакости, такође сређена по опадајућим степенима од d_3 гласи:

$$d_3^8 - 2d_3^6(b^2 + d_1^2 + d_2^2 + a^2 - 2c^2) + d_3^4[2(d_1^2 + b^2)(d_2^2 - a^2) + (b^2 + d_1^2 + a^2 + d_2^2 - 2c^2)^2] - \\ - 2d_3^2(b^2 + d_1^2 + a^2 + d_2^2 - 2c^2)(d_1^2 - b^2)(d_2^2 - a^2) + (d_1^2 - b^2)^2(d_2^2 - a^2)^2 \quad (10)$$

Лева и десна страна једнакости (7), тј. изрази (9) и (10) имају једнаке прве и последње чланове: d_3^8 и $(d_1^2 - b^2)^2(d_2^2 - a^2)^2$, који се поништавају. Остатак је после тога дељив са d_3^2. Ако то дељење извршимо, затим пребацимо све на леву страну знака једнакости и најзад средимо на тај начин, што ћемо извући пред заграду где постоје заједнички чиниоци: $a^2d_1^2$, $b^2d_2^2$ и $c^2d_3^2$, добићемо коначно:

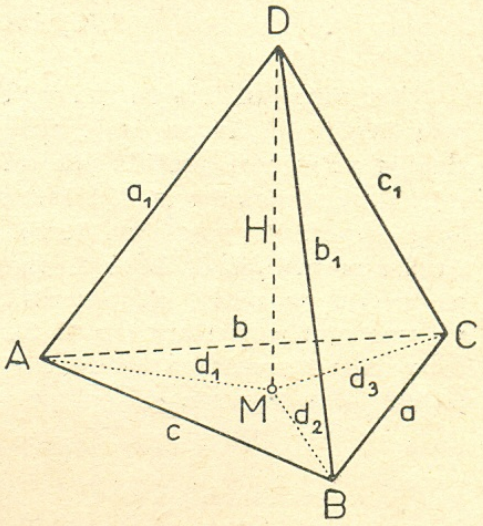
$$a^2d_1^2(b^2 + d_2^2 + c^2 + d_3^2 - a^2 - d_1^2) + b^2d_2^2(a^2 + d_1^2 + c^2 + d_3^2 - b^2 - d_2^2) + c^2d_3^2(a^2 + \\ + d_1^2 + b^2 + d_2^2 - c^2 - d_3^2) - a^2d_2^2d_3^2 - b^2d_1^2d_3^2 - c^2d_1^2d_2^2 - a^2b^2c^2 = 0 \quad (11)$$

Ово је тражена релација која постоји између међусобних отстојања 4 произвољне тачке у истој равни, а коју можемо да користимо за израчунавање запремине тетраедра помоћу његових ивица.

Нека је дат произвољни тетраедар $ABCD$ (сл. 2), где је $MD \equiv H$ висина тетраедра. Ако за отстојања тачака A, B, C и M задржимо ознаке (1), онда за њих важи релација (11). Уведимо још ознаке: $AD \equiv a_1$, $BD \equiv b_1$ и $CD \equiv c_1$.

Како је: $d_1^2 = a_1^2 - H^2$, $d_2^2 = b_1^2 - H^2$ и $d_3^2 = c_1^2 - H^2$, то заменом d_1, d_2 и d_3 овим вредностима у (11) добијамо:

$$a^2(a_1^2 - H^2)(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2 - \\ - H^2) + b^2(b_1^2 - H^2)(a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - \\ - b^2 - b_1^2) + c^2(c_1^2 - H^2)(a^2 + a_1^2 + b^2 + \\ + b_1^2 - c^2 - c_1^2 - H^2) - a^2(b_1^2 - H^2)(c_1^2 - \\ - H^2) - b^2(a_1^2 - H^2)(c_1^2 - H^2) - c^2(a_1^2 - \\ - H^2)(b_1^2 - H^2) - a^2b^2c^2 = 0.$$



Сл. 2

Ако извршимо сва назначена множења, тада ће се чланови са H^4 поништити, па ћемо добити:

$$M - NH^2 = 0 \quad (12)$$

где је:

$$M \equiv a^2a_1^2(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2) + b^2b_1^2(a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2) + c^2c_1^2(a^2 + \\ + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2) - a^2b_1^2c_1^2 - b^2a_1^2c_1^2 - c^2a_1^2b_1^2 - a^2b^2c^2 \quad (13)$$

$$N \equiv 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \quad (14)$$

Овај израз за N је према обрасцу (8), једнак $16P^2$, где је P површина троугла ABC, чије су стране a, b и c, а то је базис тетраедра. Према томе једнакост (12) може да се напише у облику $16P^2H^2 = M$. Но како је $PH = 3V$, где је V запремина тетраедра, то је $16 \cdot (3V)^2 = M$ и после замене M његовом вредношћу из (13) коначно добијамо:

$$144V^2 = a^2a_1^2(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2) + b^2b_1^2(a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2) + \\ + c^2c_1^2(a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2) - a^2b_1^2c_1^2 - b^2a_1^2c_1^2 - c^2a_1^2b_1^2 - a^2b^2c^2 \quad (15)$$

Ово је образац, који нам одређује запремину тетраедра као функцију његових ивица.

Ако су једнаке међу собом три ивице које полазе из истог темена, (на пр.: $a_1 = b_1 = c_1 \equiv s$), тада имамо прав тетраедар. Његова запремина после замене ивица a_1, b_1 и c_1 са s у (15), одређена је обрасцем:

$$144V^2 = (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)s^2 - a^2b^2c^2$$

или с обзиром на образац (8)

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{(4Ps)^2 - (abc)^2} \qquad (16)$$

Ако су пак све ивице једнаке међусобно (означимо их са s), тада нам (15) даје познати образац за запремину правилног тетраедра:

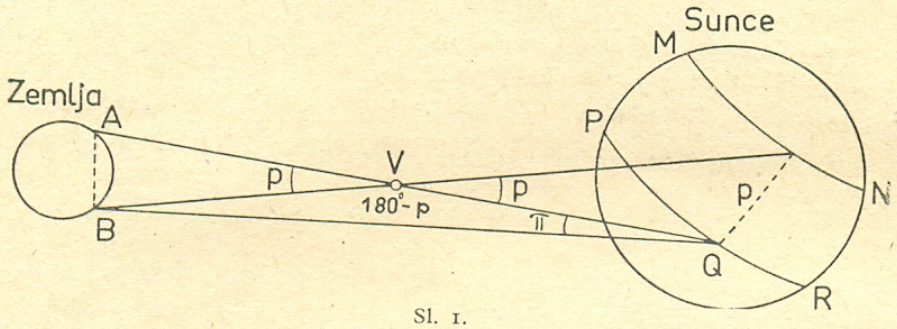
$$V = \frac{s^3\sqrt{2}}{12}.$$

Упоређујући обрасце (11) и (15) видимо да су истог облика и да (11) усвари такође претставља запремину тетраедра ($ABCM$), која је једнака нули, јер сва четири темена леже у истој равни.

Masa Zemlje i paralaksa Sunca

DR. SLAVKO ROZGAJ, Zagreb

Osnovna jedinica za mjerenje svih daljina u svemirskom prostoru je udaljenost Zemlje od Sunca, te je zato nazvana astronomskom jedinicom dužine. Njezina je vrijednost poznata tek od druge polovice XVIII. stoljeća, kad je uspjelo mjeriti paralaksu Sunca, t. j. kut, pod kojim se sa Sunca vidi polumjer Zemlje. Ali, kako je poznato, paralaksa Sunca nije se mogla direktno mjeriti, jer su dimenzije Zemlje premalene, da bi se mogao dobiti realan ili barem vjerojatan rezultat. Zato se moralo posegnuti za posrednim mjerenjem, određujući paralaksu Venere za vrijeme njezina prolaza ispred Sunca u godinama 1761. i 1769., a odavle je dobivena onda i paralaksa Sunca. Metodu za opažanje i račune ovog posla izradio je Halley još u vremenu od godine 1693. do 1716.



Sl. 1.

Princip ovog određivanja vidi se iz slike 1.

A i B neka su dvije točke na površini Zemlje, kojima je međusobna udaljenost upravo jednaka zemaljskom polumjeru. V je Venera u momentu prolaza ispred Sunca. Iz mjesta A vidi se put Venere pred Sunčevom pločom kao linija PR, a iz mjesta B kao MN. Lučna daljina ovih dviju linija p daje nam u sekundama veličinu Venerine paralakse. Luk p se određuje iz veličine prividnog promjera Sunca i točno ustanovljenih momenata, kad je slika Venerine pločice dotaknula rub Sunca izvana i iznutra u točkama M, N, P i R.

Relativne udaljenosti svih planeta bile su poznate već davno prije nego što je bila poznata astronomska jedinica dužine. Uzmemo li za njezinu vrijednost 1 (na slici dužina BQ), onda je udaljenost Venere od Sunca 0,723 i prema tome nje-

zina udaljenost BV od Zemlje 0,277. Kut Π u vrhu Q je paralaksa Sunca. Iz trokuta BVQ izlazi po poučku o sinusima

$$sin\ \Pi : sin\ p = BV : BQ.$$

Budući da su kutovi Π i p vrlo maleni možemo pisati umjesto sinusa same kutove. Unesimo još posebne vrijednosti za BV i BQ, imamo

$$\Pi : p = 0{,}277 : 1,$$

a iz toga

$$\Pi = 0{,}277 \cdot p.$$

Za paralaksu Venere p dobivena je mjerenjem vrijednost 24″,43, pa je iz toga izračunana paralaksa Sunca 8″,82. Kad nam je poznata paralaksa, onda lako odredimo astronomsku jedinicu dužine u kilometrima. Pomoću trećega Keplerova zakona dobivamo jednostavnim računom i udaljenosti ostalih planeta.

Rezultati, dobiveni u XVIII. stoljeću, stalno su popravljani kasnijim opažanjima i računima. Paralaksa Sunca određivana je i prigodom prolaza Venere godine 1874. i 1882., te opažanjima planeta Marsa i mjerenjem njegove paralakse za vrijeme velikih opozicija, kad se on približava Zemlji na 50 do 60 milijuna kilometara. Ovim trigonometrijskim metodama pridružene su i druge, osnovane na perturbacijama, koje vrši Zemlja u gibanjima susjednih planeta Marsa i Venere, na gibanju Mjeseca, brzini svjetlosti i t. d. Osobito povoljne opozicije asteroida Erosa godine 1900./01. i 1931. dale su prilike, da se dobiju točnije vrijednosti, jer se on može Zemlji približiti znatno više negoli Mars ili Venera (god. 1900. na 48, a 1931. na 22 milijuna kilometara).

Tako je astronomska jedinica dužine na razne načine kontrolirana i ispravljana. Konačno je određeno, da se u astronomskim računima uzima za paralaksu Sunca vrijednost 8″,80 a tome odgovara udaljenost Zemlje $149{,}5 \cdot 10^6\ km$. Prema računima engleskog astronoma Spencer Jonesa iz godine 1944. izlazi, da joj je točnija vrijednost 8″,79, kojoj odgovara udaljenost Zemlje $149{,}683 \cdot 10^6\ km$. Služeći se sve savršenijim spravama, astronomi će vjerojatno postići još točnije rezultate, koji će se i od ovoga barem nešto malo razlikovati.

Zanimljivo je, da između paralakse Sunca i mase Zemlje postoji jednostavan odnos, kojim se možemo poslužiti za određivanje paralakse, odnosno za kontrolu njezine vrijednosti, dobivene drugim načinom. U tu svrhu potrebno nam je da znamo nekoliko podataka, do kojih možemo doći i ne poznavajući vrijednost astronomske jedinice dužine. Samim opažanjem upoznato je sideričko ophodno vrijeme Zemlje T, pa je njezino srednje dnevno gibanje $\mu = \frac{2\pi}{T}$. Masu Sunca izračunamo iz gibanja Zemlje, a masu Zemlje iz gibanja Mjeseca.

Uzmimo, da je a srednja udaljenost Zemlje od Sunca, M masa Sunca i m masa Zemlje. Treći zakon o gibanju planeta, koji je Kepler dao u obliku $\frac{a^3}{T^2} = \text{konst.}$, napišimo u točnijem obliku prema Newtonu

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{T\sqrt{M+m}} = c.$$

Umjesto konstante c možemo uvesti povoljniju konstantu $k = 2\pi c$ tako da je

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{T\sqrt{M+m}} = \frac{k}{2\pi},$$

gdje k znači Gaussovu konstantu gravitacije, koja je jednaka 0,0172021 i izlazi iz ove formule, ako kao jedinicu vremena uzmemo srednji sunčani dan, za jedinicu dužine veliku poluos Zemljine staze i za jedinicu mase M masu Sunca. U lučnoj mjeri ona iznosi 3548″,2.

Odavle izlazi

$$k\sqrt{M+m} = \frac{2\pi}{T} a^{\frac{3}{2}}.$$

Stavimo u jednadžbu gornju vrijednost za $\frac{2\pi}{T}$ i riješimo se korijena dobivamo

$$k^2(M+m) = \mu^2 a^3. \tag{1}$$

Ovdje možemo staviti $M = 1$, a m možemo zanemariti, jer je s obzirom na M vrlo maleno. Tako dobivamo

$$k^2 = \mu^2 a^3. \tag{1a}$$

Analogna jednadžba izlazi za sustav Zemlja+Mjesec, ako sa a_1 označimo srednju udaljenost Mjeseca od Zemlje, sa m_1 masu Mjeseca i sa μ_1 srednje gibanje Mjeseca oko Zemlje. Sada je

$$k^2(m+m_1) = \mu_1^2 a_1^3. \tag{2}$$

Dijeljenjem jednadžbe (2) sa (1a) dobivamo

$$m + m_1 = \frac{\mu_1^2 a_1^3}{\mu^2 a^3}. \tag{3}$$

Označimo još ekvatorijalni polumjer Zemlje sa r i pomnožimo brojnik i nazivnik desne strane jednadžbe sa r^3, izlazi

$$m + m_1 = \frac{\mu_1^2}{\mu^2} \cdot \frac{\frac{r^3}{a^3}}{\frac{r^3}{a_1^3}}. \tag{3a}$$

Za paralaksu Sunca Π vrijedi $\frac{r}{a} = \sin \Pi$, a za paralaksu Mjeseca p_1 analogno $\frac{r}{a_1} = \sin p_1$ i tako gornja jednadžba prelazi u

$$m + m_1 = \frac{\mu_1^2}{\mu^2} \cdot \frac{\sin^3 \Pi}{\sin^3 p_1}. \tag{4}$$

Paralaksu Mjeseca možemo dosta sigurno odrediti, ako mjerimo njegov položaj na nebu u jednom momentu iz dviju točaka Zemljine površine. Tako je utvrđena horizontalna ekvatorijalna paralaksa Mjeseca za njegovu srednju udaljenost od Zemlje $p_1 = 57'2'',70$. Paralaksa Sunca Π je vrlo malena i kako je već spomenuto, zbog toga se nije mogla direktno odrediti, pa možemo pisati $\sin \Pi = \Pi \sin 1''$. Stavimo ovu zamjenu u jednadžbu (4) i dobivamo

$$m + m_1 = \frac{\mu_1^2}{\mu^2} \cdot \frac{\Pi^3 \sin^3 1''}{\sin^3 p_1}. \tag{4a}$$

Ostala je jedina nepoznata veličina Π, koju dobivamo rješavanjem jednadžbe, t. j.

$$\Pi = \frac{\sin p_1}{\sin 1''} \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{\mu_1^2}} \cdot \sqrt[3]{m + m_1}. \tag{5}$$

U ovaj izraz treba staviti $p = 3422'',70$ i $\frac{\mu}{\mu_1} = 0{,}0748013$.* Masa Zemlje m određena je na razne načine, a iz plimskog djelovanja dobili smo masu Mjeseca $m_1 = \frac{1}{81{,}53}\, m$. Nakon ovih supstitucija izlazi vrijednost

$$\Pi = \frac{\sin 3422'',70}{\sin 1''} \cdot \sqrt[3]{0{,}0748013^2} \cdot \sqrt[3]{m + \frac{1}{81{,}53}\, m}\,. \tag{6}$$

$$\sin 1'' = \frac{1}{206265},\ \text{a}\ \sqrt[3]{m + \frac{1}{81{,}53}\, m} = \sqrt[3]{m}\ \sqrt[3]{1 + \frac{1}{81{,}53}} = 1{,}00408\ \sqrt[3]{m}\,.$$

Kad ove vrijednosti stavimo u jednadžbu, dobivamo

$$\Pi = 206265 \sin 3422'',7 \cdot \sqrt[3]{0{,}0748013^2} \cdot 1{,}00408\ \sqrt[3]{m}\,. \tag{6a}$$

Označimo produkt poznatih faktora sa A, jednadžba prelazi u jednostavniji oblik

$$\Pi = A \cdot \sqrt[3]{m}\,. \tag{7}$$

Za A izlazi vrijednost $610'',057$ tako da je konačno

$$\Pi = 610'',057\ \sqrt[3]{m}. \tag{8}$$

Masu Sunca označili smo sa $M = 1$, prema tome je masa Zemlje $m = \frac{1}{333342}$.

Ako tu vrijednost unesemo u gornju formulu (8), izlazi

$$\Pi = 8'',7986,$$

a to je vrlo malo različito od vrijednosti, kojom se redovno služimo. Prema ovoj vrijednosti za paralaksu izlazi srednja udaljenost Zemlje od Sunca $149{,}507 \cdot 10^6\ km$.

U ovim računima nismo se obazirali na sploštenost Zemlje. Uvažimo li i tu činjenicu, dobivamo nešto opsežnijim matematičkim operacijama formulu, koja nije tako jednostavna, ali daje točniji rezultat.

Neke primene komplekcnog broja u trigonometriji i analitičkoj geometriji

ВЛАТКОВИЋ СИМЕОН, Београд

1) Елементи комплексног броја (сл. 1). Сваки комплексан број:

$$z = x + iy$$

састоји се из два члана. Први члан x, који је уствари чинилац реалне јединице, зове се *реални део* комплексног броја z и обележава се

$$x = R[z]$$

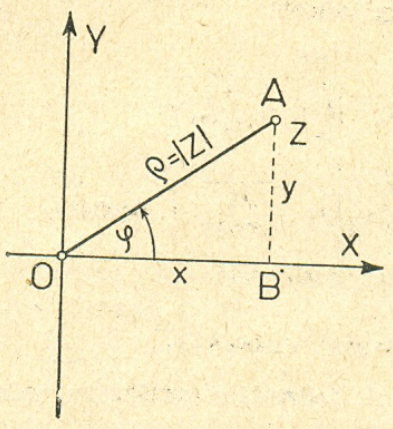
а у другом члану чинилац y имагинарне јединице зове се *имагинарни део* комплексног броја z и обележава се са:

$$y = I[z].$$

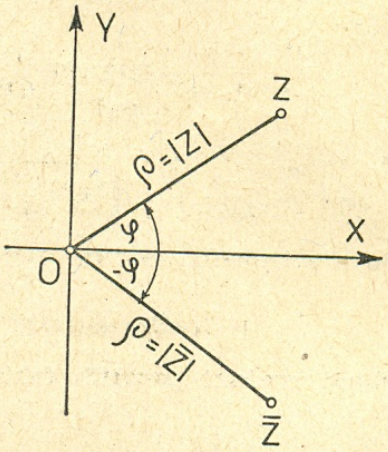
---

* Uzevši da je $\mu = \frac{2\pi}{T}$, a $\mu_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ (T i T_1 su siderična ophodna vremena Zemlje i Mjeseca izražena u danima) dobivamo $\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{2\pi}{T} : \frac{2\pi}{T_1} = \frac{T_1}{T} = \frac{27.3216609}{365{,}25636042} = 0{,}0748013$.

Према томе $R[z]$ и $I[z]$ су координате тачке A, која одговара комплексном броју z. Отстојање ρ тачке A од почетка O тј. дужина потега Oz зове се *модуо или апсолутна* вредност комплексног броја z и обележава се $|z|$. Ова вредност је увек позитивна и она износи:



Сл. 1



Сл. 2

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{или} \qquad \rho = \sqrt{(R[z])^2 + (I[z])^2}$$

Угао φ, мерен у радијанима који одређује правац потега ρ са позитивним смером реалне осовине, зове се *аргумент* комплексног броја. Из сл. 1 видимо да је:

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} = \frac{I[z]}{R[z]}.$$

2) Тригонометриски облик комплексног броја. Из троугла AOB (сл. 1) видимо:

$$x = \rho\,cos\,\varphi, \quad y = \rho\,sin\,\varphi.$$

Према томе:

$$z = x + iy = \rho\,cos\,\varphi + i\,\rho\,sin\,\varphi$$

или

$$\underline{z = \rho\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi).}$$

Ово је тригонометриски облик комплексног броја z.

3) Коњуговано комплексан број. Она два комплексна броја, код којих је разлика само у томе што им имагинарни делови имају супротне знаке зову се *коњуговано комплексни бројеви*. На пр. $5 + 3i$ и $5 - 3i$.

Ако је

$$z = x + iy$$

онда је његов коњугован број $x - iy$ и њега краће обележавамо са $\overline{z}$ тј.

$$\overline{z} = x - iy.$$

Коњуговано комплексни бројеви z и $\overline{z}$ односно тачке које им одговарају симетричне су у односу на реалну осу (сл. 2).

Модули коњуговано комплексних бројева су једнаки тј.

$$|z| = |\overline{z}| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4) Moivre-ов образац. Ако комплексни број $z = \rho\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$ квадрирамо имамо:

$$z^2 = \rho^2\,(cos\,\varphi + sin\,\varphi)^2 = \rho^2\,(cos^2\varphi + 2\,i\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi - sin^2\varphi) =$$
$$= \rho^2\,(cos^2\varphi - sin^2\varphi + 2\,i\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi) = \rho^2\,(cos\,2\varphi + i\,sin\,2\varphi).$$

Дакле:

$$(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)^2 = cos\,2\varphi + i\,sin\,2\varphi.$$

Кубирањем комплексног броја z добијамо:

$$z^3 = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^3 = \rho^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 \cdot \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^3(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^3(\cos 2\varphi\cos\varphi + i\sin 2\varphi\cos\varphi + i\cos 2\varphi\sin\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi) = \rho^3[\cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi + i(\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi)] = \rho^3[\cos(2\varphi+\varphi) + i\sin(2\varphi+\varphi)] = \rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Дакле:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Аналогно томе:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi$$

и тд. Уопште:

$$\underline{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.}$$

Овај образац зове се *Moivre-ов образац.*

5) Одредити синусе и косинусе вишеструких углова помоћу синуса и косинуса једноставног угла.

На основу Moivre-овог обрасца за $n = 2$ имамо:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

или

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Упоређењем реалних и имагинарних делова имамо:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Исто тако за $n = 3$ и упоређењем реалних и имагинарних делова Moivre-овог обрасца добијемо:

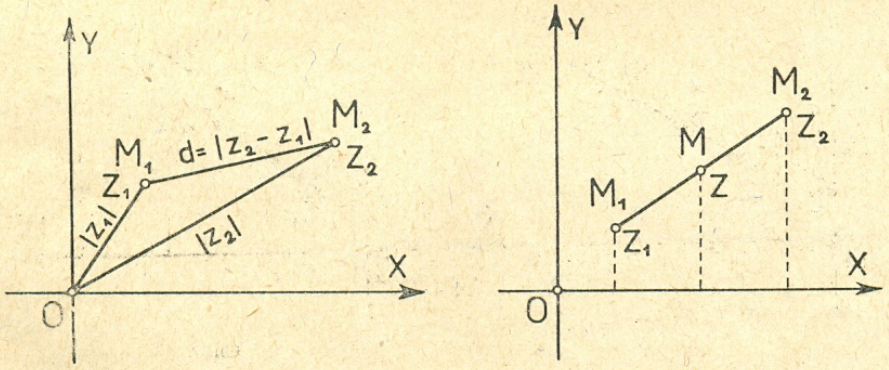
$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$
$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \quad \text{итд.}$$

6) Степене синуса и косинуса једноставног угла одредити помоћу синуса и косинуса вишеструких углова. Тако на пр. на основу Moivre-овог обрасца добијемо:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

$$\cos^3\varphi = \frac{1}{4}(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi), \quad \sin^3\varphi = \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$$

$$\cos^4\varphi = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) \quad \text{и тд.}$$



С Сл. 4

Сада ћемо показати неке примене комплексног броја у аналитици.

7) Растојање d двеју тачака (сл. 3). Знамо из аналитике образац за растојање двеју тачака $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ако тачка M_1 одговара комплексном броју $z_1 = x_1 + iy_1$, а тачка M_2 комплексном броју $z_2 = x_2 + iy_2$, па ако одузмемо ова два броја добијемо комплексан број:

$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2$$

или:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Модуо овог броја је:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Дакле растојање тачака M_1 и M_2 је модуо комплексног броја $z_1 - z_2$ тј.

$$d = |z_1 - z_2|$$

8) Координате средишта M дужи $\overline{M_1M_2}$ (сл. 4). Знамо из аналитике обрасце за координате тачке M која полови дуж $\overline{M_1M_2}$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

где су x и y координате тачке M, а x_1, y_1 и x_2, y_2 координате тачака M_1 и M_2.

Ако тачке M, M_1 и M_2 одређују редом комплексне бројеве: $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, онда сабирањем ова два последња добијемо:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Дељењем са 2 добијемо комплексан број:

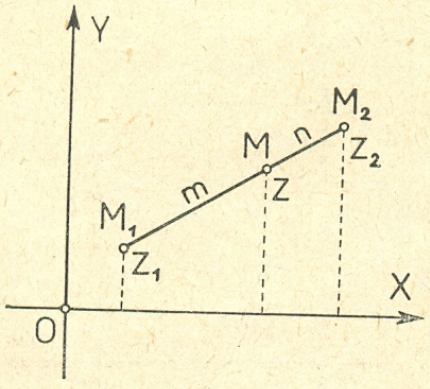
$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} + i\frac{y_1 + y_2}{2}$$

Реалан део овог комплексног броја је $\frac{x_1 + x_2}{2}$, а имагинаран део је $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

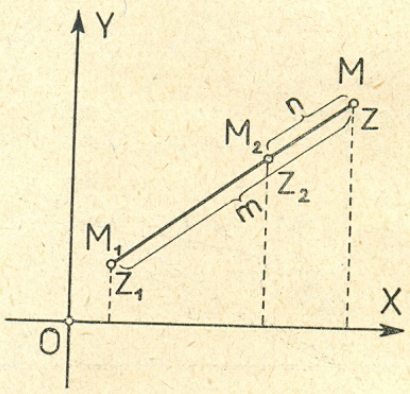
Према томе апсиса тачке M је реалан део, а ордината имагинарни део комплексног броја $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$, где су z_1 и z_2 комплексни бројеви одређени тачкама M_1 и M_2.

9) Координате тачке M, која дели дуж $\overline{M_1M_2}$ у размери $m:n=k$.

Први случај. Тачка M дели дуж по унутарњој подели (сл. 5). Знамо из аналитичке геометрије да су координате тачке M



Сл. 5



Сл. 6

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n} = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k} \qquad y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n} = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Ако је комплексан број $z = x + iy$ одређен тачком M, онда је његов реални део $x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}$, а имагинарни део $y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$ па је

$$z = \frac{x_1 + kx_2}{1+k} + i\frac{y_1 + ky_2}{1+k}, \quad \text{или} \quad z = \frac{(x_1 + iy_1) + k(x_2 + iy_2)}{1+k}$$

или

$$z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}.$$

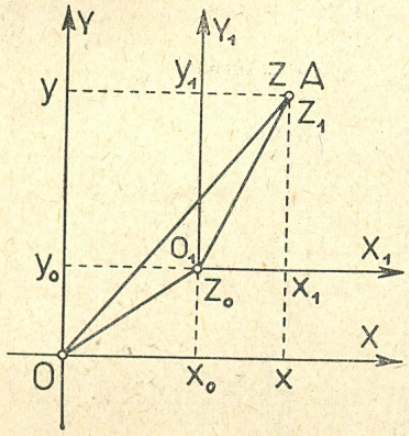
Према томе треба образовати комплексан број $z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}$, па његов реални део је апсциса, а имагинарни део ордината тачке M, која дели дуж $\overline{M_1M_2}$ по унутрашњој подели у размери $m : n = k$.

Други случај. Тачка M дели дуж по ваљској подели у размери $m : n = k$ (сл. 6). Слично као и у првом случају треба образовати комплексан број:

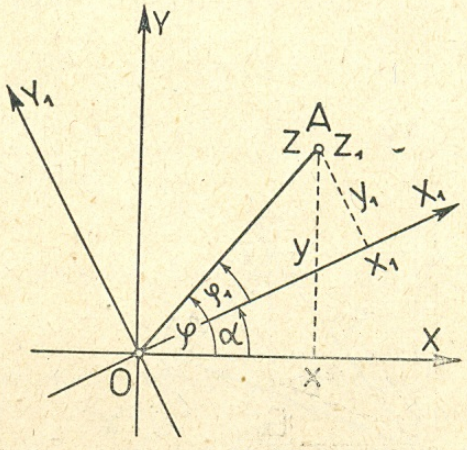
$$z = \frac{z_1 - kz_2}{1-k}$$

па његов реални део је апсциса, а имагинарни део ордината тачке M, која дели дуж $\overline{M_1M_2}$ по ваљској подели у размери $m : n = k$.

10) Транслација правоуглог координатног система (сл. 7).



Сл. 7



Сл. 8

Ако извршимо транслацију координатног система xOy тако да координатни почетак дође у тачку O_1, онда тачки A одговара према старом координатном систему xOy комплексан број $z = x + iy$, а према новом систему $x_1O_1y_1$: $z_1 = x_1 + iy_1$. Тачки O_1 према систему xOy одговара комплексан број $z_0 = x_0 + iy_0$.

Знамо из аналитичке геометрије:

$$x_1 = x - x_0\,; \qquad y_1 = y - y_0$$

па је:
$$z_1 = (x - x_0) + i(y - y_0)$$

или:
$$z_1 = (x + iy) - (y_0 + iy_0)$$

или:
$$z_1 = z - z_0.$$

Дакле образујемо комплексан број $z = z - z_0$, па ће његов реални и имагинарни део претстављати координате тачке A у новом систему x_1Oy_1.

11) Ротација правоуглог координатног система. Извршимо ротацију правоуглог координатног система xOy око тачке O за угао α и рецимо да заузме положај x_1Oy_1 (сл. 8). Тачки A одговара према старом координатном систему xOy комплексан број:

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

а према новом координатном систему x_1Oy_1 комплексан број:

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \rho(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

јер обадва имају једнаке модуле $|z| = |z_1| = \rho$, а различите аргументе:

Deobom ova dva broja dobijamo:

$$\frac{z_1}{z} = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}.$$

Realizirajem imenitelja imamo:

$$\frac{z_1}{z} = \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

ili

$$\frac{z_1}{z} = (\cos\varphi\cos\varphi_1 + \sin\varphi\sin\varphi_1) - i(\sin\varphi\cos\varphi_1 - \cos\varphi\sin\varphi_1)$$

$$\frac{z_1}{z} = \cos(\varphi - \varphi_1) - i\sin(\varphi - \varphi_1).$$

Odavde: $$z_1 = z[\cos(\varphi - \varphi_1) - i\sin(\varphi - \varphi_1)].$$

Kako je: $\alpha = \varphi - \varphi_1$ to zamenom konačno dobijemo:

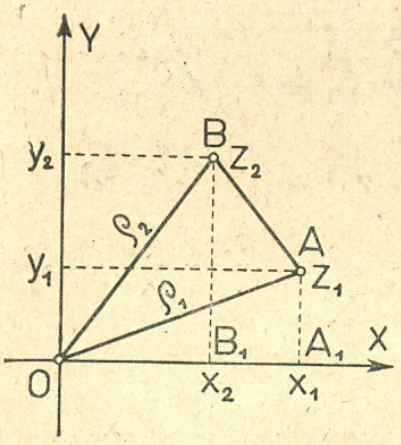
$$\underline{z_1 = z(\cos\alpha - i\sin\alpha).}$$

Zamenom vrednosti za z_1 i z imamo:

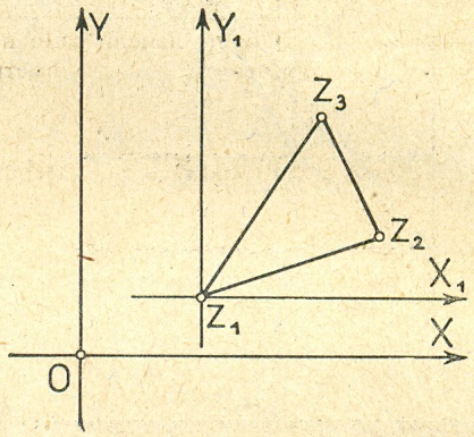
$$x_1 + iy_1 = (x + iy)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$
$$x_1 + iy_1 = x\cos\alpha + iy\cos\alpha - ix\sin\alpha + y\sin\alpha$$

ili

$$x_1 + iy_1 = (x\cos\alpha + y\sin\alpha) + i(y\cos\alpha - x\sin\alpha).$$



Sl. 9



Sl. 10

Upoređenjem realnih i imaginarnih delova obe jednakosti dobijemo obrasce za rotaciju koordinatnog sistema:

$$x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y_1 = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Dakle, da bi dobili obrasce za rotaciju pravouglog koordinatnog sistema treba da obrazujemo jednakost:

$$z_1 = z(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

i uporedimo realne i imaginarne delove.

12) Površina trougla. Uzećemo najpre trougao čije je jedno teme u koordinatnom početku (sl. 9). Površina ovog trougla je:

$$P = \triangle OB_1B + \text{trapez } B_1A_1AB - \triangle OA_1A$$

$$P = \frac{x_2y_2}{2} + \frac{(y_2 + y_1)(x_1 - x_2)}{2} - \frac{x_1y_1}{2}$$

ili $$2P = x_2y_2 + x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_1$$

ili $$\underline{2P = x_1y_2 - x_2y_1.}$$

Ako izmnožimo komplekse brojeve $\overline{z_1}$ i z_2 dobićemo:

$$\overline{z_1}z_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - ix_2y_1 + ix_1y_2 + y_1y_2$$

ili
$$\overline{z_1}z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Vidimo da je dvostruka površina našeg trougla jednaka imaginarnom delu proizvoda komplekse brojeva $\overline{z_1}$ i z_2 tj.

$$\underline{2P = I[\overline{z_1}z_2].}$$

Sada ćemo uzeti trougao, čijim temenima odgovaraju kompleksni brojevi z_1, z_2 i z_3 (sl. 10). Ako izvršimo translaciju pravouglog koordinatnog sistema xOy tako da koordinatni početak O dođe u tačku z_1, tada će tačke z_2 i z_3 u odnosu na novi pravougli koordinatni sistem $x_1z_1y_1$ biti date brojevima $(z_2 - z_1)$ i $(z_3 - z_1)$, pa ćemo imati prema gornjem obrascu za dvostruku površinu trougla obrazac:

$$2P = I[(\overline{z_2} - \overline{z_1})(z_3 - z_1).]$$

Da se uverimo:

$$(\overline{z_2} - \overline{z_1})(z_3 - z_1) = [(x_2 - iy_2) - (x_1 - iy_1)][(x_3 + iy_3) - (x_1 + iy_1)] = [x_2 - iy_2 - x_1 + iy_1][x_3 + iy_3 - x_1 - iy_1] = x_2x_3 - ix_3y_2 - x_1x_3 + ix_3y_1 + ix_2y_3 + y_2y_3 - ix_1y_3 - y_1y_3 - x_1x_2 + ix_1y_2 + x_1^2 - ix_1y_1 - ix_2y_1 - y_1y_2 + ix_1y_1 + y_1^2 = (x_2x_3 - x_1x_3 + y_2y_3 - y_1y_3 - x_1x_2 + x_1^2 - y_1y_2 + y_1^2) + i(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2).$$

Dakle dvostruka površina trougla je jednaka imaginarnom delu ovog proizvoda tj.

$$2P = x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2$$

ili
$$\underline{2P = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2).}$$

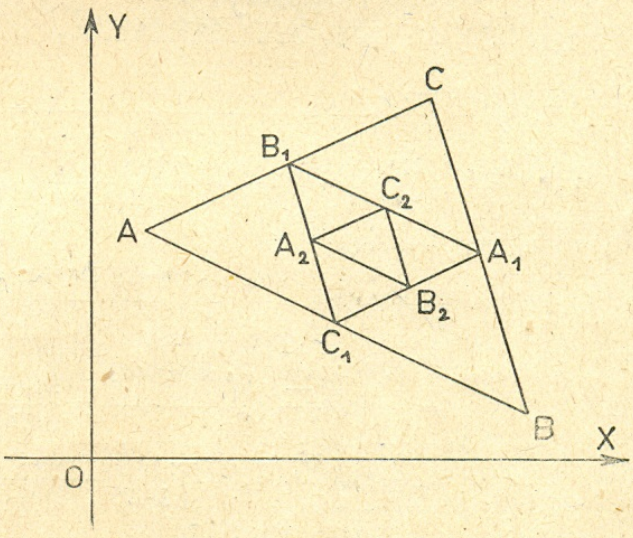
Napomiњemo da smo ovde iznели samo neke slučajeve primene kompleksnog broja, međutim on se može primeniti i u planimetriji.

Težišče trikotnika najdeno z limitnimi procesi

RAUTER ALEKSANDER, Maribor

Ako trikotniku spojimo zaporedna razpolovišča, dobimo nov trikotnik, ki predstavlja zvrnjeno sliko prejšnjega trikotnika. Ako temu zopet razpolovimo stranice in spojimo dobimo zopet zvrnjeno sliko prejšnjega, ki je pa pokončna. To se večkrat ponavlja.

Zmanjševalno razmerje vzporednih slik je po obsegih in dolžinskih dimenzijah $\frac{1}{2}$, pri ploščinskih pa $\frac{1}{4}$. Vsaka težišnica je skupna trikotnikom zaradi tega, ker veže raspolovišče stranice z nasprotnim ogljiščem. Zaradi vzporednosti stranic velikega in majhnega trikotnika, razpolavlja težišnica istočasno stranice velikega in majhnega trikotnika.



To se pravi, da je vsaka težišnica velikega trikotnika obenem tudi težišnica majhnega trikotnika, ali z drugim besedami: težišče je skupna točka vseh nadaljnjih trikotnikov. Središče očrtanega kroga in višinska točka moreta biti tudi zunanji točki (pri topokotnih trikotnikih). Središče včrtanega kroga in težišče sta pa vedno notranji točki.

Torej je težišče skupna notranja točka vseh trikotnikov, ki so zgoraj omenjeni, je res limita dosedanjih trikotnikov.

Poizkusil bom dokazati analitično formulo $T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ s pomočjo limitnih procesov.

Recimo, da imam točke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ potem je vsako raspolovišče formula

$$R_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),\ R_2\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right),\ R_3\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right),$$

$$R_1 \equiv C_1,\quad R_2 \equiv B_1,\quad R_3 \equiv A_1.$$

Ker sta si obe koordinati enakovredni zato zadošča dokaz samo za x (za absciso, za ordinato velja analogija).

Zaporedna raspolovišča:

I. $x_1 \qquad x_2 \qquad x_3$

II. $\frac{x_1+x_2}{2} \qquad \frac{x_1+x_3}{2} \qquad \frac{x_2+x_3}{2}$

III. $\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_3}{2}\right):2 = \frac{2x_1+x_2+x_3}{4},\ \frac{x_1+2x_2+x_3}{4},\ \frac{x_1+x_2+2x_3}{4}$

IV. $\frac{3x_1+3x_2+2x_3}{8},\ \frac{3x_1+2x_2+3x_3}{8},\ \frac{2x_1+3x_2+3x_3}{8}$

V. $\frac{6x_1+5x_2+5x_3}{16},\ \frac{5x_1+6x_2+5x_3}{16},\ \frac{5x_1+5x_2+6x_3}{16}$

VI. $\frac{11x_1+11x_2+10x_3}{32},\ \frac{11x_1+10x_2+11x_3}{32},\ \frac{10x_1+11x_2+11x_3}{32}$

VII. $\frac{22x_1+21x_2+21x_3}{64},\ \frac{21x_1+22x_2+21x_3}{64},\ \frac{21x_1+21x_2+22x_3}{64}.$

Zaporedne člene dobimo tako, da enostavno od prejšne trojice števil poiščemo aritmetično sredino in to vedno od dveh členov.

Za lihe (neparne) člene zaporedja dobim izraz kjer prevladujejo v svoji vrednosti koeficienti posameznih x-ov, drugod pri sodih (parnih) členih pa pa prevladujejo koeficienti *vsot*.

Limito dokazujem s pomočjo enega samega člena.

I. $x_1 = \frac{x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3}{1} = \frac{1x_1+0\cdot(x_1+x_2+x_3)}{2^0};$

III. $\frac{2x_1+x_2+x_3}{4} = \frac{x_1+1(x_1+x_2+x_3)}{2^2};$

V. $\frac{6x_1+5x_2+5x_3}{16} = \frac{x_1+5(x_1+x_2+x_3)}{2^4} = \frac{x_1+(2^2+2^0)(x_1+x_2+x_3)}{2^4}$

VII. $\frac{22x_1+21x_2+21x_3}{64} = \frac{x_1+21(x_1+x_2+x_3)}{2^6} = \frac{x_1+(2^4+2^2+2^0)(x_1+x_2+x_3)}{2^6}.$

Po indukciji se dobi;

$$2n+1 \text{ člen} = \frac{x_1+(2^{2n-2}+2^{2n-4}+\cdots+1)(x_1+x_2+x_3)}{2^{2n}} =$$

$$= \frac{x_1+\frac{2^{2n}-1}{2^2-1}(x_1+x_2+x_3)}{2^{2n}} = \frac{3x_1+(2^{2n}-1)(x_1+x_2+x_3)}{3\cdot 2^{2n}}$$

$$x_T \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{3x_i+(2^{2n}-1)(x_1+x_2+x_3)}{3\cdot 2^{2n}} \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$x_T \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3x_i}{2^{2n}}+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(x_1+x_2+x_3)}{3} = \frac{0+(1-0)(x_1+x_2+x_3)}{3} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

Torej je $T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

Liho zaporedje konvergira torej proti aritmetični sredini koordinat.

Sedaj mi gre za sodo (parno) zaporedje.

II. $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1\cdot(x_1+x_2+x_3)-x_3}{2} = \frac{2^0(x_1+x_2+x_3)-x_3}{2^{2-1}}$

IV. $\frac{3x_1+3x_2+2x_2}{2^3} = \frac{3(x_1+x_2+x_3)-x_3}{2^3} = \frac{(2^2-2^0)(x_1+x_2+x_3)-x_3}{2^{4-1}}$

VI. $\frac{11x_1+11x_2-10x_3}{2^5} = \frac{11(x_1+x_2+x_3)-x_3}{2^{6-1}} = \frac{(2^4-2^2-2^0)(x_1+x_2+x_3)-x_3}{2^{6-1}}$

$2n$-ti člen dobim $\frac{(2^{n-2}-2^{2n-4}-2^{2n-6}\cdots-2^0)(x_1+x_2+x_3)-x_3}{2^{2n-1}} =$

$$= \frac{\left(2^{2n-2}-\frac{2^{2n-2}-1}{2^2-1}\right)(x_1+x_2+x_3)-x_3}{2^{2n-1}} = \frac{3\cdot 2^{2n-2}-(2^{2n-2}-1)(x_1+x_2+x_3)-3x_3}{3\cdot 2^{2n-1}} =$$

$$= \frac{(3\cdot 2^{2n-2}-2^{2n-2}+1)(x_1+x_2+x_3)-3x_3}{3\cdot 2^{2n-1}} = \frac{(2\cdot 2^{2n-2}+1)(x_1+x_2+x_3)-3x_3}{3\cdot 2^{2n-1}}$$

$$x_T \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{2n-1}+1)(x_1+x_2+x_3)-3x_3}{3\cdot 2^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2^{2n-1}}\right)(x_1+x_2+x_3)-\frac{3x_3}{2^{2n-1}}}{3} =$$

$$= \frac{(1+0)(x_1+x_2+x_3)-0x_3}{3} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

$T \equiv \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ po tem postopku.

Ogljišča vseh sodih kot tudi likih zaporednih včrtanih trikotnikov imajo težišče kot limito oziroma stikališče.

Možno je dokazati s pomočjo popolne indukcije, da predstavlja res to zaporedje ogljišča trikotnikov in je težišče zarez limita zaporedja včrtanih trikotnikov.

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

János Bolyai

J. Bolyai je sin Farkasa Bolyai-a (1775 do 1856), profesora matematike u Marošvašarhelju. Bolyai je bio odličan matematičar-pedagog, uostalom genijalan polihistor, koji je osim matematike pisao drame; njemu pripisuju pronalazak nekoliko praktičnih stvari. Svoje matematičke studije svršio je u Njemačkoj. Studirao je zajedno sa Gaussom, s kime je bio u prisnom prijateljstvu i dopisivali su se do smrti.

F. Bolyai imao je iz braka sa nervno teško bolesnom ženom sina Janoša, rođenog 15 decembra 1802 g. Dete je u sebi sjedinilo sve dobre i rđave osobine svojih roditelja.

Pod vodstvom oca matematičara započeo je sjajnu matematičku karijeru. Pre nego što je znao da čita i piše, već je poznavao sva geometrijska tela, pošto ga je otac naučio da ih iseca iz krompira. U svojoj šestoj godini već je raspoznavao zvezde na zvezdanom nebu i u isto vreme je već odlično čitao i pisao. Kroz nekoliko godina je sasvim savladao Euklidove Elemente i Eulerovu Algebru i kao trinaestogodišnji dečak poznavao diferencijalni račun. U petnaestoj godini, godinu dana pre roka, završio je srednju školu. F. Bolyai je imao nameru da sina pošalje Gaussu, ali ga je ovaj odbio.

J. Bolyai morao je kod kuće čekati da dostigne starost od osamnaest godina, da bi mogao biti primljen u vojno-inžinjersku akademiju u Beču, gde je studije završio 1823 godine. Već je ovde počeo da se bavi problemom paralela.*

Posle završetka studija, kao poručnik, bio je na službi u Temišvaru i ovde je našao rešenje pomenutog problema. U pismu od 3 nov. 1823 g. pisao je ocu da je našao rešenje, ali je tek 1825 god. poslao svoj rad v. Eckwehru, koji je bio njegov profesor matematike u Beču. Posle više prerada najzad je 1831 godine štampano kao prilog uz knjigu F. Bolyaia: Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos...

Bolyaijevo delo nosi naslov: Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidi independentem. Delo ima nekih 30 strana, a pisano je latinski, a na mađarskom jeziku štampano je tek 1897 godine, kada je već bilo prevedeno na sve svetske jezike, čak i na japanski.

Otac je jedan primerak knjige poslao Gaussu i zamolio ga za mišljenje. Gauss je u svom odgovoru od 6 marta 1832 g. pisao, da je neke od Bolyaijevih rezultata već i sam našao, ali još nije dao štampati, smatravši da vreme još nije zrelo za ovaj problem i da se raduje da je konačno rešenje dobio baš sin njegovog prijatelja. Od ovog vremena J. Bolyai je strašno mrzeo Gaussa, misleći da mu ovaj želi oteti slavu. Njegova mržnja je postigla vrhunac, kada je posle nekoliko godina dobio pismo od Gaussa, u kome mu ovaj saopštava da je njegove rezultate još 1826 godine dobio Rus Lobačevski. Priča se, da je po primitku ovog pisma pozvao oca na dvoboj, optužujući ga, da je njegove rezultate još 1823 g. saopštio Gaussu, od koga ih je Lobačevski saznao. Dvoboj, koji bi nesumnjivo značio smrt oca, znajući da J. Bolyai nikad nije gubio u dvoboju, na sreću je sprečen.

1833 g. je penzionisan, jer mu je već tada toliko smetao duševni poremećaj, da nije dalje mogao vršiti službu. Od tada do svoje smrti — što nije čudno kod ove bolesti — stalno je radio na nepotrebnim stvarima: tražio greške u Gaussovim radovima i dokazivao svoje prvenstvo pred Lobačevskim.

Umro je 1860 g. umno sasvim poremećen.

J. Bolyai spada u red najvećih matematičara, pošto je danas već neosporno da su on i Lobačevski našli isti epohalni rezultat nezavisno jedan od drugoga.

(-E-)

* Problem paralela je: da li je peti EUKLID-ov postulat, koji govori o paralelnosti, nezavisan od ostalih postulata, ili se da izvesti iz njih? Za detalje o tom problemu čitaoc se upućuje na sledeću literaturu:

Blanuša D.: *O neeuklidskim geometrijama* (Mat.-fiz. list, god. V. br. 4. i god. VI. brojevi 1.—3.).

Dr. M. Hercigonja: *N. I. Lobačevski* — Izd. Hrv. Prir. Društva — Zagreb 1947.

Matematička Čitanka — Izd. Nakl. Zavod Hrv. — Zagreb 1947. — strane 195/203.

Lav Rajčić, *Povvdom stogodišnjice smrti N. I. Lobačevskoga* Mat.-fiz. list, god. VII. br. 2.

Kako se računa $\sqrt[n]{A}$

Pretpostavljamo, da su n i A cijeli pozitivni brojevi i da A nije n-ta potencija nekog broja; u tom je slučaju jedino realno rješenje jednadžbe $x = \sqrt[n]{A}$ iracionalan broj, t. j. broj, koji ima beskonačno mnogo decimala, a nije periodski. Odrediti ga možemo samo približno, i to tako, da mu odredimo jednu gornju i jednu donju granicu a i b, t. j. da bude $a > \sqrt[n]{A} > b$. I a i b su približne vrijednosti za $\sqrt[n]{A}$, pa su to točnije, što je razlika $a - b$ manja.

Ako su nam pri ruci logaritamske tablice, lako ćemo odrediti približnu vrijednost za x iz $\log x = \frac{1}{n} \log A$; ta će biti to točnija, što su logaritmi u tablicama izračunati na više decimala.

Ako nam treba točnija približna vrijednost od one nađene u tablicama, onda ćemo upotrebiti binomni poučak. Neka je

$$a^n > A > (a-1)^n!$$

Ako je na pr.

$$\frac{a^n - A}{a^n} < \frac{A - (a-1)^n}{(a-1)^n},$$

pisat ćemo

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^n - b} = a\sqrt[n]{1 - \frac{b}{a^n}} = a\left(1 - \frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= a\left[1 - \frac{1}{n}\cdot\frac{b}{a^n} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{b}{a^n}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{b}{a^n}\right)^3 + \cdots\right];$$

red u uglastoj zagradi je konvergentan, a konvergira to brže, što je $\frac{b}{a^n}$ manje. Što više članova reda uzmemo u račun, to će točnija biti tražena približna vrijednost.

Primjeri: **1.** $\sqrt{30} = \sqrt{36-6} = 6\sqrt{1-\frac{1}{6}} = 6\left(1-\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$; da izračunamo $\sqrt{30}$ na 5 decimala točno, valja u redu za $\left(1-\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$ uzeti 7 članova. Pišemo li

$$\sqrt{30} = \frac{1}{2}\sqrt{120} = \frac{1}{2}\sqrt{11^2-1} = \frac{11}{2}\left(1-\frac{1}{121}\right)^{\frac{1}{2}},$$

pa u redu za $\left(1-\frac{1}{121}\right)^{\frac{1}{2}}$ uzmemo u račun prvih 5 članova, dobivamo na 10 decimala točno $\sqrt{30} = 5{,}4772255750\ldots$

2. $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$; ako uzmemo 11 članova reda za $\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$, dobivamo na 11 decimala točno $\sqrt[3]{30} = 3{,}10723250595\ldots$

3. $\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{32-2} = 2\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}$; 6 članova reda za $\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}$ daju na 8 decimala točno $\sqrt[5]{30} = 1{,}97435048\ldots$

Samo od sebe nameće se pitanje, kako su izračunavali $\sqrt[n]{A}$ prije otkrića logaritama i binomnog poučka? Osnovna ideja jedne zaboravljene, vrlo duhovite i dobre metode, je ova: radikand A valja prikazati kao produkt od n faktora, koji se postupno tako mijenjaju, da razlika među njima postane što manja.

Primjeri. **1.** $\sqrt{A} = \sqrt{a_0 b_0}$; neka je $a_0 > b_0 > 0$! Faktore a_0 i b_0 zamijenimo njihovom aritmetičkom i harmonijskom sredinom:

$$a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} \qquad b_1 = \frac{2a_0b_0}{a_0+b_0}!$$

Vidimo da je

$$a_0 > a_1 > b_1 > b_0, \quad a_1b_1 = a_0b_0 = A.$$

Općeno: ako je

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},$$

bit će $a_{n+1}\cdot b_{n+1} = a_nb_n = \cdots = a_1b_1 = a_0b_0 = A$ i $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n+1} > \sqrt{A} > b_{n+1} > b_n > \cdots > b_1 > b_0$. Lijevi niz pada, a desni raste prema granici $\sqrt{A}$, kad n raste, i to oba rapidno.

Na pr.

$$\sqrt{30} = \sqrt{6\cdot 5}; \quad a_1 = \frac{11}{2}, \quad b_1 = \frac{60}{11}; \quad a_2 = \frac{241}{44}$$

$$b_2 = \frac{1320}{241}; \quad a_3 = \frac{116\,161}{21208} = 5{,}477\,225\,575\,2\ldots,$$

$$b_3 = \frac{636\,240}{116\,161} = 5{,}477\,225\,574\,8\ldots$$

i prema tome je na 8 decimala točno

$$\sqrt{30} = 5{,}477\,225\,57\ldots$$

2. Za $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{a_0b_0c_0}$ vrijede ove formule:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n+c_n}{3}, \quad b_{n+1} = \frac{a_nb_n+a_nc_n+b_nc_n}{a_n+b_n+c_n},$$

$$c_{n+1} = \frac{3a_nb_nc_n}{a_nb_n+a_nc_n+b_nc_n}.$$

I ovdje je $a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1} = a_nb_nc_n = \cdots = a_1b_1c_1 = a_0b_0c_0 = A$, $a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1}$ za $n \geqq 1$, a granice $a_{n+1} > \sqrt[3]{A} > c_{n+1}$ su to uže, što je n veće.

Na pr. $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{\frac{10}{3}\cdot 3\cdot 3}$; $a_1 = \frac{28}{9}$, $b_1 = \frac{87}{28}$,

$$c_1 = \frac{90}{29}; \quad a_2 = \frac{68123}{21924}, \quad b_2 = \frac{211674}{68123},$$

$$c_2 = \frac{109620}{35279}; \quad a_3 = 3{,}107\,232\,505\,954\,1\ldots,$$

$c_3 = 3{,}107\,232\,505\,953\,6\ldots$, i prema tome je na 11 decimala točno $\sqrt[3]{30} = 3{,}107\,232\,505\,95\ldots$

3. Neka je $\sqrt[5]{A} = \sqrt[5]{a_nb_nc_nd_ne_n}$! Ako označimo aritmetičku sredinu tih pet faktora s p_1, a aritmetičke sredine umnožaka od po 2, po 3, po 4 i po 5 tih faktora redom s p_2, p_3, p_4 i p_5, onda nam je $a_{n+1} = p_1$, $b_{n+1} = \frac{p_2}{p_1}$, $c_{n+1} = \frac{p_3}{p_2}$, $d_{n+1} = \frac{p_4}{p_3}$ i $e_{n+1} = \frac{p_5}{p_4}$. Relacije među tim faktorima su iste kao u predašnjem slučaju.

Na pr. $\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{\frac{15}{8} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$; $a_1 = \frac{79}{40}$, $b_1 = \frac{156}{79}$, $c_1 = \frac{77}{39}$, $d_1 = \frac{152}{77}$, $e_1 = \frac{75}{38}$; $a_2 = 1{,}974\,350\,54\ldots$ $e_2 = 1{,}974\,350\,43\ldots$ prema $a_2 > \sqrt[5]{30} > e_2$ izlazi na 6 decimala točno

$$\sqrt[5]{30} = 1{,}974350\ldots$$

S. Šk-a

O školovanju Nikole Tesle u Rakovcu

Tesla je ujesen god. 1870 došao u Karlovac, da se upiše u višu realku u Rakovcu. To je mjesto spadalo u hrvatsko-slavonsku vojnu krajinu, u kojoj se školska obuka držala na njemačkom jeziku. Za školske predmete postojalo je ovih 6 ocjena: odlično (ausgezeichnet), izvrsno (vorzüglich), veoma dobro ili pohvalno (lobenswert), dobro (befriedigend), dovoljno (genügend), nedovoljno (ungenügend). Samo je peti razred svršio Tesla s odličnim uspjehom, a ostale sa dobrim i vrlo dobrim. Najbolji je bio u njemačkom jeziku, gdje je ponajviše ocijenjen s odličnim. Najslabiji je bio u nacrtnoj geometriji i prostorukom crtanju. Na ispitu zrelosti imao je ove ocjene: zemljopis, povijest, njemački jezik, izvrsno; fizika, kemija, prirodopis, francuski jezik, vjeronauk, veoma dobro; matematika, deskriptivna geometrija, hrvatski jezik, dobro; prostoručno crtanje, dovoljan. U školskim zapisima ima spomenuto, da su mu 29. lipnja 1885 izdani duplikati njegovih svjedodžbi.

Tesla je tražio duplikate očito zato, da ih dade kao prilog molbi, kojom je tražio državljanstvo SAD, koje je dobio godine 1891.

Niža realka u Rakovcu osnovana je god. 1851. Godine 1863. proširena je na višu realku sa 6 razreda, a godine 1871. otvoren je i najviši 7. razred.

Od g. 1878. neki su se predmeti predavali na hrvatskom jeziku (hrv. jezik, prirodopis, zemljopis, vjeronauk), ostali »realni« predmeti na njemačkom. To je bilo sve dok Vojna Krajina nije bila pripojena Banskoj Hrvatskoj.

D. P-ć

Izražavajmo se precizno

Ponajprije ovo pitanje: Za koliko je 400 veće od 100? Odgovor: Za 300. Pitanje: Koliko je puta 400 veće od 100? Odgovor: 4 puta. A sad stavimo ovo pitanje: Za koliko je puta 400 veće od 100? Odgovor se nalazi u knjizi: F. Soeborg, I takvih ima, Zagreb 1956. str. 191.: »Preben je bio dao igri još jednu bitnu nijansu, povećavši polje igre od deset puta deset polja na dvadeset puta dvadeset. Time je područje operacija bilo povećano za četiri puta; . . .«

Jasno je kao na dlanu, da je područje operacija bilo time povećano za tri puta, jer je $100+100 \cdot 3=400$. Tako je ispravno, ali je ljepše reći: »Time je područje operacija bilo povećano četiri puta«, bez onoga »Za«.

Da zaključivanje u navedenom tekstu nije dobro, opaža se odmah, ako se tekst ovako promijeni: »Preben je bio dao igri još jednu bitnu nijansu, povećavši polje igre od deset puta deset polja za četiri puta«. Područje igre ne bi sad više imalo oblik kvadrata, jer bi imalo 500 polja.

Ovakove i slične greške osobito u statističkim podacima mogu znatno umanjiti vrijednost tih podataka.

S. Šk-a

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

240. Углови α и β задовољавају услову

$$m \sin\alpha + \sin\beta = 0,$$

где је m произвољан број. Показати да је у том случају задовољен и следећи услов

$$(m-1)\, tg\frac{\alpha-\beta}{2} + (m+1)\, tg\frac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

241. Пирамида $SABCD$ има као базу правоугли трапез $ABCD$ са правим угло-

вима у B и C; стране тог трапеза су $AB = BC = 2a$ и $DC = 3a$; врх пирамиде се пројектује у средини M нормале повучене из A на DC; дата је и бочна ивица $SD = 3a\sqrt{2}$.

Изразити површину и запремину пирамиде као функцију промењиве a.

242. Zadana su 2 kruga (O_1, r) i $\left(O_2, \frac{r}{2}\right)$; udaljenost središta tih krugova je $O_1O_2 = \frac{7r}{2}$.

Neka se na O_1O_2 i između O_1 i O_2 odredi točka T takova, da, ako povučemo tangente TA_1 i TA_2 na svaki od oba kruga, da je $\overline{TA_1}^2 + \overline{TA_2}^2 = l^2$, gdje je l zadana dužina. Uputa: uzmi $O_1T = x$ za nepoznanicu.

Zadatak je moguć, ako se x nalazi između r i $\frac{7r}{2} - \frac{r}{2} = 3r$.

243. U istokračnom trokutu ABC $(AB = AC)$ poznat je kut φ, što ga strana AB čini sa težišnicom BD. Koliki je kut $CBD = x$?

Uputa za diskusiju. Kako je $\alpha = 180° - 2(\varphi + x)$ i $\alpha > 0$ izlazi $90° - \varphi > x$ i odatle $0 < tg\, x < ctg\, \varphi$.

244.** Izračunaj:

$$\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + bx + c} \text{ za } x = -\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a - b}}.$$

245.** Izračunaj:

$$\frac{(a^2+a-1)(a^2-a+1) - (a^2+a+1)(a^2-a-1)}{(a^2+a-1)(a^2+a+1) - (a^2-a+1)(a^2-a-1)}$$

246.* Umnožak triju uzastopnih brojeva djeljiv je s 504, kad je srednji broj potpuni kub.

247.* Kako bi odredio sve cijele brojeve, kojih kvadrat podijeljen s 23 daje za ostatak 16?

248.* Sat ima 3 kazaljke: kazaljku sekunda, kazaljku minuta i kazaljku sati; *a)* kad će se poslije 3 sata kazaljka sekunda pokriti s kazaljkom sati? *b)* kad će se poslije 12 sati kazaljka sekunda pokriti s kazaljkom minuta? *c)* kad će poslije 3 sata kazaljka sekunda biti simetrala kuta između kazaljke minuta i kazaljke sata? Uzmi u obzir, da kazaljka sekundi načini u 1 sekundi kut od 6° i t. d.

249.* Brzi vlak prođe jednoliko kolodvorom duljine 300 m. Kolika je njegova brzina i duljina, ako treba 8 sekundi da prođe ispred nepomičnog motrioca, a 28 sekundi da prođe kolodvorom?

250. Koja od kružnica $x^2 + y^2 = r^2$ siječe elipsu $9x^2 + 25y^2 = 225$ pod najvećim šiljastim kutom i koliki je taj kut?

251. Zadane su točke $M(-1, 2)$ i $N(5, 4)$ kao vrhovi dvaju pramena pravaca. Neka se odredi geom. mjesto sjecišta po dviju zraka tih pramena, kojima su koeficijenti smjera k i m vezani jednadžbom $km = 1$.

252. Ako n pripada prirodnom nizu brojeva, treba dokazati identičnost

$$\frac{(2n+1)^5 - 2n - 1}{192} = S_2\left(S_1 + \frac{1}{4}\right)$$

gdje je S_1 i S_2 zbir od n prirodnih brojeva odnosno zbir kvadrata prirodnih brojeva.

B) Zadaci iz fizike

131. Tijelo težine $T = 5kp$ spušta se niz kosinu dužine $l = 5\ m$ dižući tijelo težine $T' = 2kp$, koje se penje duž visine $h = 3\ m$. Koja je akceleracija nastalog gibanja i za koje se vrijeme tijelo težine T' digne za visinu h?

132. Tijelo gustoće d stavi se bez početne brzine na površinu sloja tekućine dubine h i gustoće d' $(d' < d)$; *a)* Za koje će vrijeme tijelo stići na dno sloja; *b)* Koja je njegova kinetička energija na kraju tog vremena, ako mu je masa m?

133. Njihalo sata udara sekunde kod 15 °C na mjestu, gdje je $g = 9{,}8\ ms^{-2}$. *a)* Koliko je trajanje njihaja, ako se temperatura povisi na 25 °C i za koliko sekundi kasni sat u jednom danu? *b)* U koju bi visinu trebalo donijeti sat, da on za isto toliko kasni, ako temperatura ostane 15 °C?

[*koef. rast.* $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$, $R = 6370\ km$].

134. U električnom kuhalu za 220 V i 3 A treba ugrijati 1 kg vode od 10 °C do 100 °C; *a)* Kako to dugo traje? *b)* Koliko to stoji, ako se računa 1 kWh 10 Din?

135. Zraka monohromatske svjetlosti prodre u nutrinu staklene kugle indeksa loma n, pod kutom upadanja α; u kugli se 3 put reflektira (djelomično) i izlazi iz kugle u zrak. *a)* Izrazi devijaciju δ, što je čini zraka, koja izlazi, sa zrakom koja ulazi, u funkciji od α i pripadnog kuta loma β, *b)* Koliki je indeks loma n tog stakla? (kutovi α i δ se mogu mjeriti).

C) Rješenja iz matematike

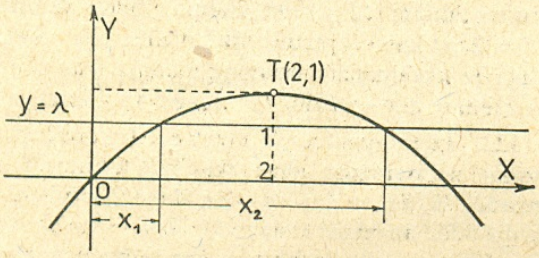
228. *Тачка M описује полукруг пречника $AB = 4$. Нека је P пројекција тачке M на AB; ставимо $AM = x$.*

а) *Разлику $y = AM - AP$ изразити као функцију промењиве x затим конструисати график те функције кад тачка M опише дати полукруг.*

b) *Права* $y = \lambda$, *где је* λ *променљив параметар, сече криву из т.* а) *у тачкама чије су апсцисе* x_1 *и* x_2. *Дискутовати број и природу ших пресека за разне вредности* λ.

в) *Показати да тачке* M_1 *и* M_2 *на полукругу, којима одговарају растојања* x_1 *и* x_2 *од тачке* A, *леже на правој паралелној са* AB *ако је* $x_1^2 + x_2^2 = 16$. *Одредити у том случају положај праве* $y = \lambda$.

а) Као катета правоуглог троугла AMB, $x^2 = 4\overline{AP}$, а $\overline{AP} = \frac{x^2}{4}$ па је тражена функција $y = x - \frac{x^2}{4}$; теме параболе је $T \equiv (2, 1)$.



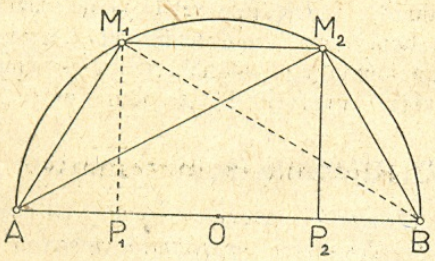
б) Из графика читамо за апсцисе тих пресека

1. $\lambda > 1$ пресека нема
2. $\lambda = 1$ $\quad x_1 = x_2 = 2$
3. $1 > \lambda > 0$ $\quad 0 < x_1 < x_2$
4. $\lambda = 0$ $\quad x_1 = 0,\ x_2 = 4.$

Кад тачка M опише полукруг x се мења од 0 до 4. Значи да тачке параболе за које је $x < 0$ или $x > 4$ не треба разматрати.

в) Услов је $\overline{AM_1}^2 + \overline{AM_2}^2 = 16$ ($\overline{AM} = x_1$ $\overline{AM_2} = x_2$ нису припадне апсцисе пресека праве $y = \lambda$ у овом случају). Ако спојимо M_1 и B тада из ΔAM_1B и из ΔAM_2B следи

$\overline{AM_1}^2 + \overline{BM_1}^2 = \overline{AB}^2 = 16$ и $\overline{AM_2}^2 + \overline{BM_2}^2 = 16$.



Упоређена свака од ове две релације са условом даје $\overline{AM_2} = \overline{BM_1}$ и $\overline{AM_1} = \overline{BM_2}$, зато је $\Delta AM_1B \cong \Delta AM_2B$ то значи да су им висине једнаке $\overline{M_1P_1} = \overline{M_2P}$ и $\overline{M_1M_2} \parallel \overline{AB}$.

Положај праве $y = \lambda$ у мом случају одређујемо тако што поред услова $x_1^2 + x_2^2 = 16$ знамо да је $x_1 + x_2 = 4$ ($x_1 + x_2 = 2x_T$) тј.

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16,\ 16 - 2x_1x_2 = 16,$$
$$x_1x_2 = 0.$$

Дакле x_1 и x_2 су корени једначине $x^2 - 4x = 0$, $x_1 = 0$, а $x_2 = 4$, а тада је $\lambda = 0$, права се поклапа са x — осом.

Мудрински Војислав
уч. 7а р. г. »Св. М.« Нови Сад

229. *Решити квадратну неједначину*

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 > x(x - 1).$$

а) Проверити добијено решење служећи се графицима функција

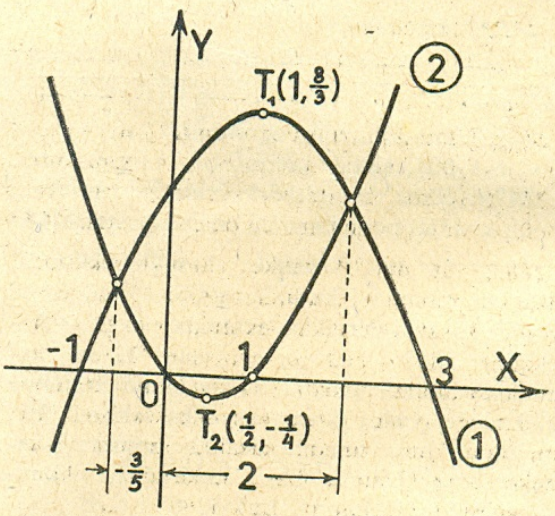
$$y_1 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2;\ y_2 = x(x - 1).$$

б) Означимо са a *и* b *корене једначине* $y_1 = 0$, *а са* c *и* d *корене једначине* $y_2 = 0$. *Одредити два броја* x_1 *и* x_2 *који истовремено задовољавају једначине*

$$2x_1x_2 - (a + b)(x_1 + x_2) + 2ab = 0$$
$$2x_1x_2 - (c + d)(x_1 + x_2) + 2cd = 0$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 > x(x - 1)$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 - x(x - 1) > 0$$



$$-5x^2 + 7x + 6 > 0 \qquad (1)$$

Како су корени квадратне једначине

$-5x^2 + 7x + 6 = 0$, $x_1 = -\frac{3}{5}$, а $x_2 = 2$,

то ће квадратна неједначина (1) бити задовољена када је $-\frac{3}{5} < x < 2$.

а) Графици функције y_1 и y_2 су параболе, и то: 1) за y_1 имамо теме $(1, \frac{8}{3})$, окренута на више, а нуле: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, 2) за y_2 је теме $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ окренута на ниже, а нуле: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Стварно је $y_1 > y_2$ за оне вредности апсцисе x између x_1 и x_2 тј. $-\frac{3}{5} < x < 2$.

б) $y_1 = 0 \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad (1)$

$y_2 = 0 \quad x^2 - x = 0 \qquad (2)$

Ако су a и b корени прве, а c и d корени друге једначине тада је по Вијетовом правилу

$$a + b = 2 \text{ и } c + d = 1$$
$$ab = -3 \qquad cd = 0$$

па је

$$2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6 = 0$$
$$2x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0.$$

Ако од друге одузмемо прву једначину добијамо да је

$$x_1 = -6 - x_2.$$

Ако ову вредност за x_1 сменимо у другој добијамо да је

$$x_1' = -3 - 2\sqrt{3} \text{ или } x_2' = -3 + 2\sqrt{3}$$
$$x_2'' = -3 + 2\sqrt{3} \qquad x_2'' = -3 - 2\sqrt{3}$$

Јакшић Оливера
уч. 7_4 р. 7 беогр. гимн.

230. *Докажи: ако је* $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ *дељиво с* $x^2 + 2ax + b$, *први је полином потпуни куб, други је потпуни квадрат.*

$$(x^3 + 3ax^2 + 3bx + c) : (x^2 + 2ax + b) = x + a$$
$$x^2 + 2ax + bx$$
$$- \quad - \quad -$$
$$ax^2 + 2bx + c$$
$$ax^2 + 2a^2x + ab$$
$$- \quad - \quad -$$
$$2x(b - a^2) + (c - ab)$$

Пошто по услову $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ мора бити дељиво са $x^2 + 2ax + b$, израз:

$$2x(b - a^2) + (c - ab)$$

мора бити идентички раван нули, т. ј. мора бити

$$b - a^2 = 0, \quad c - ab = 0.$$

Одавде следи: $b = a^2$, $c = ab = a \cdot a^2 = a^3$.

Тада дати полиному постаје:

I $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$ и

II $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$.

Grubin Nada, уč. 7_1 r. g. Zrenjanin

231. *Израчунај без кубирања или растављања у факторе:* $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3$.

Задани израз се поништава за $a = 0$, $b = 0$ и $c = 0$. То значи да је дати израз дељив са $a \cdot b \cdot c$. Како је тај израз симетрични и хомогени полином 3 степена, можемо писати $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = k \cdot abc$ где је k нека константа. Да одредимо ту константу ставимо на пр. $a = b = c$ у горњи израз, следи

$$(3a)^3 - a^3 - a^3 - a^3 = ka^3, \quad ka^3 = 27a^3 - 3a^3,$$
$$ka^3 = 24a^3, \quad k = 24.$$

Значи горњи је израз једнак $24abc$ тј.

$$(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc.$$

Јеремић Душан
уч. 8_3 р. г. »Св. М.« Ниш

232. *Докажи: ако су* a, b *и* c *три различита броја или највише 2 од њих могу бити између себе и једнака, тад је*

α) $a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$.

Ако су пак a, b *и* c *мерни бројеви страна троугла тад је увек*

β) $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc$.

α) Ако су a, b и c различити можемо писати

$$(a - b)^2 > 0, \quad (a - c)^2 > 0, \quad (c - b)^2 > 0.$$

Ако ове неједначине саберемо онда добијамо

$$2(a^2 + b^2 + c^2) > 2(ab + ac + bc) \quad \text{или}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc.$$

β) Ако су a, b и c стране троугла онда имамо

$$(a - b)^2 < c^2, \quad (a - c)^2 < b^2, \quad (b - c)^2 < a^2.$$

Ако ово саберемо и уредимо онда добијамо $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc < 0$ или $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc$ што је требало доказати.

Јеремић Ђурђе
уч. 5. р. г. »Св М.« Ниш

Нар. ур. Zadatak se može pisati

$$a^2 - a(b + c) + b^2 + c^2 - bc > 0.$$

Ovo je kvadratni trinom u a. Njegova je diskriminanta

$$(b + c)^2 - 4(b^2 + c^2 - bc) = -3(b - c)^2,$$

dakle uvijek negativna, prema tomu je kvadratni trinom uvijek pozitivan t. j. nejednakost je uvijek ispunjena.

Zadatak se može riješiti i s pomoću identiteta

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

233. Dokaži: *pomnožimo li koja mu drago četiri uzastopna broja i dobivenom produktu dodamo 1, dobijamo uvek potpuni kvadrat.*

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+n)(n^2+5n+6)+1 = n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1.$$

Stavimo da je: $n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = (n^2+an+b)^2$

odakle sledi: $n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = n^4+a^2n^2+b^2+2an^3+2bn^2+2abn$

ili: $n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = n^4+2an^3+(a^2+2b)n^2+2abn+b^2.$

Pošto leva strana identički mora biti ravna desnoj, mora biti i:

$2a=6,\quad a^2+2b=11,\quad 2ab=6,\quad b^2=1.$

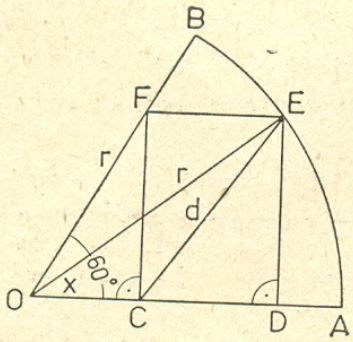
Odavde sledi: $a=3,\quad b=1.$

Zaista; $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = (n^2+3n+1)^2.$

Grubin Nada, uč. 7_1 r. 1 g. Zrenjanin

234. *U kružni isječak OAB sa centralnim uglom od 60°, poluprečnika r upiši pravougaonik, čija jedna strana leži na OA i čija je dijagonala jednaka d. Diskusija!*

Uputa: Ako je *GDEF* traženi pravougaonik upisan u kružni isječak i tačka *E* na luku *AB*, $\sphericalangle AOE$ označimo sa *x*.



Po poučku o kosinusima u trouglu *EOC* je $d^2 = r^2 + \overline{OC}^2 - 2\,OC\cdot r\cos x$

ili, jer je $OC = ctg\,60^0 \cdot r\sin x$;

$$d^2 = r^2 + \frac{1}{3}r^2\sin^2 x - \frac{2}{3}r^2\sqrt{3}\sin x\cos x$$

$$d^2(\sin^2 x+\cos^2 x) = r^2(\sin^2 x+\cos^2 x) + \frac{1}{3}r^2\sin^2 x - \frac{2}{3}r^2\sqrt{3}\sin x\cos x$$

$$\sin^2 x\left(d^2-r^2-\frac{1}{3}r^2\right)+\frac{2}{3}r^2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos x\,(d^2-r^2)=0$$

ili pomnoženo sa $\frac{-3}{\cos^2 x}$

$$(4r^2-3d^2)\,tg^2x - 2r^2\sqrt{3}\,tg\,x + 3r^2 - 3d^2 = 0 \quad (1)$$

Ugao *x* se može mijenjati od 0^0 — 60^0 pa *tg x* mora biti u intervalu $0 - \sqrt{3}$.

Jednačina (1) ima samo jedno rješenje ako je $f(0)\,f(\sqrt{3}) < 0$ t.j. $3(r^2-d^2)(3r^2-4d^2) < 0$ za $\frac{r}{2}\sqrt{3} < d < r.$

Jednačina (1) ima dva rješenja ako ispunjava ove uslove: 1) $D \geqq 0$, 2) $af(0) > 0$, 3) $af(\sqrt{3}) > 0$ 4) $0 < \frac{S}{2} < \sqrt{3}$.

1) $D = 12r^4 - 4(4r^2-3d^2)(3r^2-3d^2) = -36d^4 + 84r^2d^2 - 36r^4$; $D \geqq 0$ za

$$r\sqrt{\frac{1}{6}(7-\sqrt{13})} \leqq d \leqq r\sqrt{\frac{1}{6}(7+\sqrt{13})}$$

2) $(4r^2-3d^2)(r^2-d^2) > 0$ za $d < r$ i $d > \frac{2r}{\sqrt{3}}$

3) $(4r^2-3d^2)(9r^2-12d^2) > 0$ za $d < r\frac{\sqrt{3}}{2},\quad d > \frac{2r\sqrt{3}}{3}$

4) i 5) $0 < \frac{r^2\sqrt{3}}{4r^2-3d^2} < \sqrt{3}$, oba uslova ispunjena za $d < r$.

Svi ti uslovi ispunjeni za

$$r\sqrt{\frac{1}{6}(7-\sqrt{13})} \leqq d < \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Martinis Vinko
uč. 8a r. g. F. Višnjić, Bijeljina

Mudrinski Vojislav rješava zadatak da stavlja $y = \frac{tg\,x}{\sqrt{3}-tg\,x}$ (vidi Mat. fiz. list, g. 5 str. 156), odatle je $tg\,x = \frac{y\sqrt{3}}{y+1}$, jednadžba postaje

$$3(3r^2-4d^2)y^2 - 6d^2y + 3(r^2-d^2) = 0$$

ispituje, kad ona ima oba ili samo jedan korijen pozitivan i dolazi do istog rezultata.

235* Докажи: *умножак двају фактора, од којих је сваки једнак збиру двају квадрата, може се приказати такође као збир 2 квадрата и то на два начина.*

Нека је $x = a^2+b^2$ и $y = c^2+d^2$ па је $xy = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, даље је

$$xy = (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) \quad (1)$$

Ако даље измножим

$$(a+bi)(c-di) = (ac+bd) - i(ad-bc)$$

и $(a - bi)(c + di) = (ac + bd) + i(ad - bc)$
па је
$xy = [(ac+bd) - i(ad-bc)][(ac+bd)+i(ad-bc)]$
$xy = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.
Ако пак у једнакости (1) измножим
$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
и $(a - bi)(c - di) = ac - bd) - i(ad + bc)$
па је
$xy = [(ac-bd)+i(ad+bc)][(ac-bd)-i(ad+bc)]$
или $xy = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Јакшић Оливера, уч. 7_4 7 београдске гимн.

Donosimo još jedan način rješavanja; označimo li s k^2, l^2, m^2, n^2, četiri zadana kvadrata tada je $P = (k^2 + l^2)(m^2 + n^2)$ zbroj 2 kvadrata. Dokaz:

$$P = k^2m^2 + l^2n^2 + k^2n^2 + l^2m^2.$$

1. $P = k^2m^2 + 2klmn + l^2n^2 + k^2n^2 - 2klmn + l^2m^2 = (km + ln)^2 + (kn - lm)^2$.
2. $P = k^2m^2 - 2klmn + l^2n^2 + k^2n^2 + 2klmn + l^2m^2 = (km - ln)^2 + (kn + lm)^2$

Miketinac Milivoj, uč. 7d r. 3. g. Zagreb

236. Израчунај:

α) $\dfrac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^3 + b^3 - a^2b - ab^2} - \dfrac{ab^2 + b^3 - a^3 - a^2b}{a^4 - b^4 - 2a^3b + 2ab^3}$,

β) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \cdot \dfrac{x^6 - y^6}{x^4 + x^2y^2} : \left(1 - \dfrac{y^4}{x^4}\right)$.

α) Имамо

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^3 + b^3 - a^2b - ab^2} - \frac{ab^2 + b^3 - a^3 - a^2b}{a^4 - b^4 - 2a^3b + 2ab^3} =$$

$$= \frac{(a-b)^2}{a^2(a-b) - b^2(a-b)} -$$

$$- \frac{b^2(a+b) - a^2(a+b)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2) - 2ab(a^2-b^2)} =$$

$$= \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a^2-b^2)} - \frac{-(a+b)(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a-b)^2} =$$

$$= \frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{(a-b)^2} =$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + b^2}{(a-b)^2(a+b)} = \frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)^2}.$$

β) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \cdot \dfrac{x^6 - y^6}{x^4 + x^2y^2} : \left(1 - \dfrac{y^4}{x^4}\right) =$

$$= \frac{(x^2+y^2)^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \cdot \frac{(x^2-y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)}{x^2(x^2+y^2)} \cdot$$

$$\cdot \frac{x^4}{x^4 - y^4} = x^2.$$

Асурџић Гордана, уч. 5_1 р. 17 беогр. г.

237. *Neka se izračuna stranica $2x$ baze pravilne šesterostrane piramide, ako joj je pobočni brid jednak b i oplošje $O = 6k^2$.*

Ako je u pobočna visina, imamo

$$6ux + 6x \cdot \frac{2x}{2}\sqrt{3} = 6k^2 \text{ ili}$$

$$x\sqrt{b^2 - x^2} + x^2\sqrt{3} = k^2,$$

$$x\sqrt{b^2 - x^2} = k^2 - x^2\sqrt{3}$$

$$\left(\text{mora biti } k^2 > x^2\sqrt{3} \text{ ili } x^2 < \frac{k^2}{\sqrt{3}}\right).$$

Kvadriranjem izlazi

$$4x^4 - (b^2 + 2k^2\sqrt{3})x^2 + k^4 = 0. \quad (1)$$

Stavimo $x^2 = y$ imamo

$$4y^2 - (b^2 + 2k^2\sqrt{3})y + k^4 = 0. \quad (2)$$

Kako je $2x < b$ mora također biti $x^2 < \dfrac{b^2}{4}$.

Zadatak je moguć, ako jednadžba (2) ima barem jedan pozitivan korijen, koji je u isti čas i manji od $\dfrac{b^2}{4}$ i manji od $\dfrac{k^2}{\sqrt{3}}$.

Načinimo $f\left(\dfrac{b^2}{4}\right)$ i $f\left(\dfrac{k^2}{\sqrt{3}}\right)$. Nalazimo

$$f\left(\frac{b^2}{4}\right) = k^2\left(k^2 - \frac{b^2\sqrt{3}}{2}\right), \; f\left(\frac{k^2}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{k^2}{3}(k^2 - b^2\sqrt{3}).$$ Razlikujemo ove slučajeve:

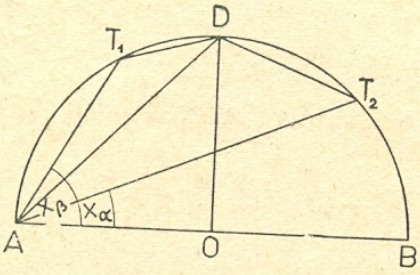
1) $k^2 < \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\dfrac{b^2}{4}\right) < 0$, $f\left(\dfrac{k^2}{\sqrt{3}}\right) < 0$, $\dfrac{b^2}{4}$ i $\dfrac{k^2}{\sqrt{3}}$ nalaze se, jer je $a = 4$ t.j. > 0, između korijena, pa zadovoljava samo manji korijen x_1^2.

2) $k^2 = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\dfrac{b^2}{4}\right) = 0$; $x^2 = \dfrac{b^2}{4}$ je korijen, $b = 2x$, piramida se reducira na bazu — drugi je korijen $b^2 - \dfrac{b^2}{4} = 3\dfrac{b^2}{4}$ pa ne zadovoljava.

3) $k^2 > \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}$. Uz pretpostavku da korijeni postoje, mora također biti $\dfrac{S}{2} < \dfrac{b^2}{4}$ ili također $f'\left(\dfrac{b^2}{4}\right) > 0$ t. j. $8x^2 - (b^2 + 2k^2\sqrt{3} > 0$ ili $2b^2 - b^2 - 2k^2\sqrt{3} > 0$ ili $b^2 > 2k^2\sqrt{3}$ t. j. $k^2 < \dfrac{b^2}{\sqrt{3}} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{6}$, što se očito protivi pretpostavci. Zadatak dakle ne može nikad imati 2 rješenja. *S. Š.*

238. *Zadan je polukrug središta O, promjera AB; poluprečnik OD normalan je na AB. Tačkom A povuče se tetiva AT, te se spoji A i D i T i D. Neka se izračuna ugao BAT=x tako, da trougao ATD ima zadanu površinu k^2. Razlikuj 2 slučaja: α) T se nalazi između B i D, β) T se nalazi između A i D. Diskusija!*

α) Ako je tačka T između B i D površina trougla ADT je



$$k^2 = \frac{1}{2} \cdot 2r^2 \sqrt{2} \cos x \cdot \sin (45^0 - x)$$

ili kad izračunamo $\sin (45^0 - x)$

$$k^2 = r^2 \cos x \, (\cos x - \sin x)$$

$$k^2 (\sin^2 x + \cos^2 x) = r^2 \cos^2 x - r^2 \cos x \sin x$$

$$k^2 \sin^2 x + r^2 \sin x \cos x + (k^2 - r^2) \cos^2 x = 0$$

podijeljeno sa $\cos^2 x$:

$$k^2 \operatorname{tg}^2 x + r^2 \operatorname{tg} x + b^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

Ugao x se može mijenjati od $0^0 - 45^0$, a $\operatorname{tg} x$ između 0 i 1.

Jednačina (1) ima samo jedno rješenje, ako je $f(0)\, f(1) < 0$ t. j. $2k^2 (k^2 - r^2) < 0$ za $k^2 < r^2$.

Jednačina (1) bi imala 2 rješenja ako bi ispunjavala ove uslove: 1) $D \geqq 0$, 2) $af(0) > 0$, 3) $af(1) > 0$ i 4) $0 < \frac{S}{2} < 1$.

Kako je ovdje $a = k^2 > 0$ možemo a i izostaviti.

1) $D = r^4 + 4k^2 r^2 - 4k^4$, $D \geqq 0$ za

$$0 \leqq k^2 \leqq \frac{r^2}{2} (1 + \sqrt{2}),$$

2) $k^2 - r^2 > 0$ za $k^2 > r^2$,

3) $2k^2 > 0$ uslov uvijek ispunjen,

4) $0 < \frac{-r^2}{2k^2} < 1$ uslov nemoguć jer 0 ne može biti manja od jednog negativnog broja. Dakle zadatak ne može nikad imati 2 rješenja.

β) Ako je točka T između A i D površina trougla ADT je

$$k^2 = \frac{1}{2} \cdot 2r^2 \sqrt{2} \cos x \sin (x - 45^0).$$

Na isti način kao pod α) dolazimo do jednačine

$$k^2 \operatorname{tg}^2 x - r^2 \operatorname{tg} x + k^2 + r^2 = 0 \qquad (2)$$

Ugao x se može mijenjati od $45^0 - 90^0$, a $\operatorname{tg} x$ između 1 i $+\infty$. Treba ispitati koliko jednačina (2) ima korijena većih od 1.

Jednačina bi imala samo 1 rješenje kad bi bilo $af(1) < 0$, ali taj uslov nije ispunjen jer je uvijek $af(1) = 2k^4 > 0$.

Jednačina (2) ima 2 rješenja ako ispunjava ove uslove: 1) $D \geqq 0$, 2) $af(1) > 0$, 3) $1 < \frac{S}{2}$.

1) $D = r^4 - 4k^2 r^2 - 4k^4$, $D \geqq 0$

za $0 \leqq k^2 \leqq \frac{r^2}{2} (\sqrt{2} - 1)$.

2) $2k^4 > 0$ uslov uvijek ispunjen.

3) $1 < \frac{r^2}{2k^2}$ za $2k^2 < r^2$.

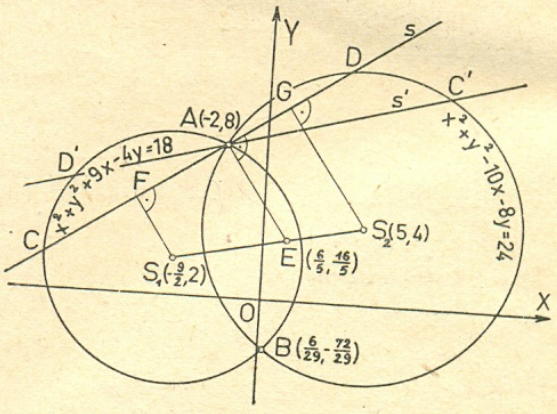
Ti su uslovi ispunjeni za

$$0 \leqq k^2 \leqq \frac{r^2}{2} (\sqrt{2} - 1).$$

Martinis Vinko
uč. 8a r. g. »F. Višnjić« Bijeljina

Mudrinski Vojislav rješava zadatak stavivši $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ ili $\operatorname{tg} x = \frac{y}{y+1}$ u prvom slučaju i $y = \operatorname{tg} x - 1$ u drugom slučaju i ispituje, kad su korijeni dobiveni jednadžbe pozitivni i dolazi do istog rezultata.

239. *Zadane su jednadžbe dviju kružnica: $x^2 + y^2 + 9x - 4y = 18$ i $x^2 + y^2 - 10x - 8y = 24$. One se sijeku u tačkama A i B. Neka je tačkom A povuče pravac s tako, da se tetiva AC prve kružnice odnosi prema tetivi AD druge kružnice kao 3 : 2.*



Ako se tetive AC i AD odnose kao 3 : 2 onda se i njihove polovine također odnose kao 3 : 2. Ako povučemo normale u tačkama F, A i G do duži $S_1 S_2$ onda će ove normale da je dijele u omjeru 3 : 2. Koristeći se formulom za podjelu duži u datom omjeru dobivamo koordinate tačke E:

$$E_x = \frac{3\cdot 5 + 2\cdot\left(\frac{-9}{2}\right)}{5} = \frac{6}{5},$$

$$E_y = \frac{3\cdot 4 + 2\cdot 2}{5} = \frac{16}{5}.$$

Dakle: $E\left(\frac{6}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

Rješavanjem jednačina ova dva zadana kruga dobićemo koordinate tačke A i B.

Oduzmemo li obje jednačine izlazi $y = \frac{-19x-6}{4}$ i ako to uvrstimo u prvu jednačinu dobijamo $377x^2 + 676x - 156 = 0$ ili ako pokratimo s 13, $29x^2 + 52x - 12 = 0$,

$$x_1 = -2,\ x_2 = \frac{6}{29},\ y_1 = 8,\ y_2 = -\frac{72}{29}.$$

Pošto znamo koordinate tačaka A i E možemo da odredimo koeficijent smjera pravca kroz ove dvije točke.

$$k = (8 - \frac{16}{5}) : (-2 - \frac{6}{3}) = -\frac{3}{2}.$$

Budući da se pravac EA siječe sa pravcem s pod pravim uglom to koeficijent smjera pravca s iznosi:

$$k_s = \frac{2}{3}.$$

Tako smo dobili sve podatke koji su potrebni za traženi pravac s: tačka A i koeficijent smjera, te jednačina ovog pravca glasi

$$y - 8 = \frac{2}{3}(x + 2) \text{ ili } 3y - 2x - 28 = 0.$$

Ako uzmemo desnu kružnicu kao prvu, a lijevu kao drugu, dobivamo sasvim slično koordinate tačke $E'\left(-\frac{7}{10}, \frac{14}{5}\right)$ i jednačina pravca s' glasi $4y - x - 34 = 0$.

Mandić Mile
uč. 8a r. g. »F. V.« Bijeljina

Решили задатке из 2 броја

Аргировски Артур, уч. 5а кл. гим. »Гоце Делчев« Куманово, 236β; *Асурџић Гордана*, уч 5_1 раз. 17 беогр. г. 230, 232, 233, 236; *Врачарић Мирјана*, уч. 5_4 г. Сомбор, 233, 236β; *Гавриловић Љиљана*, уч. 5 р. 17 беогр. гим. 230, 232, 233, 236; *Гронингер Едуард*, уч. 6_4 раз. г. Сомбор, 230, 233, 236; *Дрешевић Милан*, уч. 8*c* р. гимн. Бања Лука, 238, *Ђорђевић Живојин*, уч. 8_4 р. г. Прокупље, 229, 230, 232, 233, 235, 236, 239, *Ђуричић Гојко*, 8 а р. гимн. Цетиње, 239; *Јакшић Оливера*, уч. 7_4 р. 7 беогр. г. 229, 230, 232, 233, 235, 238, *Јеремић Биљана*, уч. 5_4 раз. г. »Св. М.« Ниш, 236; *Јеремић Душан*, уч. 8_3 раз. г. »Св. М.« Ниш, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239; *Јеремић Ђурђе*, уч. 5_3 р. г. »Св. М.« Ниш, 230, 231, 232, 233, 235, 236; *Константиновић Ђ. Милован*, уч. 6_4 р. г. Ћуприја, 236; *Лешић Милан*, уч. 6*c* раз. г. Суботица, 230, 233, 236; *Маринов Трпче*, уч. 8 клас. г. Битола, 228, 229, 230, 232, 236, 237 (дел.); *Марковић Александар*, уч. 6_1 р. 5 беогр. г. 236; *Марковић Ратомир* уч. 6_2 р. г. Ћуприја, 230, 232, 236; *Мудрински Војислав*, уч. 7*d* р. г. »Св. М.« Нови Сад, 22 , 229, 230, 232, 234, 236, 238; *Надрљански Сава*, уч. 7 б р. г. »Урош Предић« Панчево, 229, 230, 231, 232, 233, 235, 23 ; *Петровић Олга*, уч. 5_1 р. 17 беогр. г. 230, 233, 236; *Радовановић Радмила*, уч. 5_3 р. г. »Св. М.« Ниш, 230, 235, 236; *Радовановић Нинослав*, уч. 6_2 р. г. »Ст. Сремац», Ниш, 232, 236; *Радосављевић Гордана*, уч. 5. р. г. 17 беогр. г. 230, 236; *Сенић Слободан*, уч. 8_1 р. г. Рума, 233; *Стојковић Драгица*, уч. 5_2 раз. г. »Ст. Сремац« Ниш, 236, *Томић Бранислав*, уч. 7_4 р. г. Ћуприја, 230, 232, 236; *Фрушић Миодраг*, уч. 8_3 раз. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 239; *Христов Мира*, уч. 6_4 р. гимн. Сомбор, 230, 233, 236, *Чочановић Мирослав*, 8_3 раз. г. Приштина, 229, 236; *Babić Nada Gordana*, uč. 8 a r. g. Vinkovci, 236, 237; *Blagojević Aleksandar*, uč. 7. r. g. Ćuprija, 233, 235; *Basar Ivan*, uč. 7. b r. g. Karlovac, 228, 229, 230, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238; *Crepić Stjepko*, uč. 8. c r. g. Nova Gradiška, 228, 236, 237, 239; *Doglod Arif*, uč. 5. a r. gimn. Zenica, 236; *Dučević Mario*, uč. 8. c r. 2. g. Zagreb, 228, 229, 232; *Grubin Nada*, uč. 7_1 r. gimn. Zrenjanin, 230, 233, 235, 236; *Hraste Ante*, uč. 6. a r. 2. g. Zagreb, 237 (djel.); *Hrvoić Marija*, uč. 6. a r. 2. g. Zagreb, 229; *Kovač Antal*, uč. 6_5 r. g. Sombor, 230, 232, 233, 236; *Kovač Jožef*, uč. 8_5 r. gimn. Sombor, 230, 232, 233, 236; *Kulišić Petar*, uč. 7. a r. g. Dubrovnik, 234, 236, 238; *Kurjački Smilja*, uč. 6_4 r. g. Vrbas, 236; *Lekić Alija*, uč. 7b r. 4. gimn. Sarajevo, 230, 232, 233, 236; *Ljupša Danilo*, uč. 8. c raz. 1. g. Maribor, 229, 230, 232, 233, 236; 237 (djel.); *Mandić Mile*, uč. 8. a raz. g. »F. Višnjić« Bijeljina, 233, 236, 237 (djel.), 239; *Martinis Vlado*, uč. 8. a raz. g. »F. Višnjić« Bijeljina, 228, 229, 230, 232, 233, 234, 236, 237, 238, 239; *Mere Istvan*, uč. 6_5 r. gimn. Sombor, 230, 233, 236: *Mesihović Behđed*, uč. 5_4 r. g. Mostar, 230, 236; *Miketinac Mi-*

livoj, uč. 7. b r. 3. g. Zagreb, 230, 231, 232, 233, 235, 236, 237 (djel.); *Nikolić Gojko*, uč. 8. c r. 2. g. Zagreb, 228; *Nikolić Ilonka*, uč. 8. r. gimn. Đakovo, 229, 230, 232, 233, 236, 237 (djel.), 239; *Peterlin Peter*, uč. 8. a r. 8. g. Ljubljana, 229; *Ranković Borko*, uč. 7_3 r. g. Knjaževac, 236; *Stojčeva Penka*, uč. 5*b* kl. g. »J. B. Tito« Bitola, 236; *Stojković Angelina*, uč. 8_4 r. g. »Sv. M.« Niš, 232, 233, 236.

D) Rješenja zadataka iz fizike

126. *Dva radnika prenose s pomoću motke dugačke 2 m, a teške 4 kg*, željeznu blagajnu težku 80 kg*. Pita se 1. koliki teret nosi svaki od njih, ako je blagajna smještena tako, da svojom težinom djeluje u središtu motke; 2. koliku radnju izvrši prvi radnik, ako ruku s motkom digne 15 cm visoko; 3. ako se blagajna pritom pomakne na motki za 20 cm prema drugom radniku, koliki će sada teret otpasti na prvog, a koliki na drugog radnika; 4. konačno, jedan radnik gura sam blagajnu, stavljenu na kolica, 20 kg* teška, uz kosinu, koja je 20 m duga, a 4 m visoka; koliku je radnju pritom izvršio; kolikom je prosječnom snagom pritom djelovao, ako je radnja trajala dvije minute? (Trenje zanemarujemo).*

Rješenje: 1. Svaki od dvojice radnika nosi jednak teret:

$$P_1 = P_2 = \frac{80 + 4}{2}\ kg^* = 42\ kg^*$$

2. Radnja radnika, koji je digao ruku s teretom 15 *cm* visoko, bit će:

$$R = 42 \cdot 0{,}15\ kg^*m = 6{,}3\ kg^*m.$$

3. Od težine motke otpada i sada na svakog radnika pola te težine, dok se težina blagajne raspodjeljuje na radnike u obratnom smjeru udaljenosti objesišta blagajne od krajeva motke:

$$P_1' : P_2' = p_2 : p_1 = 0{,}80 : 1{,}20,$$

a kako je

$$P_2' = P - P_1',$$

gdje je P težina blagajne, bit će

$$P_1' : (P - P_1') = 0{,}80 : 1{,}20;$$

odatle izlazi

$$P_1' = 32\ kg^*, \quad P_2' = 48\ kg^*.$$

Dodamo li svakoj od ovih težina još po 2 kg^* od težine motke, imamo konačno:

$$P_1'' = 34\ kg^*, \quad P_2'' = 50\ kg^*.$$

4. Radnja R_1 izvršena uz kosinu duljine $d = 20\ m$ bit će:

$$R_1 = F \cdot d,$$

gdje je F sila, kojom treba gurati kolica:

$$F = 100 \cdot \sin\alpha = 100 \cdot \frac{4}{20} = 20\ kg^*$$

$$R_1 = 20 \cdot 20 = 400\ kg^*m.$$

Prosječna snaga bit će:

$$S = \frac{R_1}{t} = \frac{400}{120} = 3\tfrac{1}{3}\ kg^*m/sek = 32{,}7\ vata.$$

127. *Čelični valjak, visok 20 cm, gustoće 7,8, uronjen je vertikalno u živu; ispod njega, neposredno na njegovom dnu, učvršćen je valjak iz platine, gustoće 21,12, jednake osnovke kao i čelični valjak, tako, da sustav pliva u vertikalnom položaju na taj način, da gornja osnovka čeličnog valjka viri 3 cm visoko iznad površine žive. Kolika je visina platinenog valjka?*

Rješenje: Označimo li sa q površinu osnovke valjka u cm^2, bit će masa M_1 čeličnog valjka:

$$M_1 = q \cdot 20 \cdot 7{,}8\ grama,$$

a platinenog:

$$M_2 = q \cdot x \cdot 21{,}12\ grama,$$

gdje je x nepoznata visina platinenog valjka.

Po zakonu plivanja treba masa istisnute žive (M_3) biti jednaka ukupnoj masi obadvaju valjaka:

$$M_3 = M_1 + M_2$$

$$q \cdot (x + 17) \cdot 13{,}6 = q \cdot 20 \cdot 7{,}8 + q \cdot x \cdot 21{,}12$$

Odatle lako nađemo visinu x platinenog valjka; nakon sređivanja, izlazi:

$$(21{,}12 - 13{,}6)\,x = 17 \cdot 13{,}6 - 20 \cdot 7{,}8$$

$$x = 10\ cm.$$

128. *U širokoj cijevi, dugačkoj 1,2 m nalazi se na dnu 4 kg olovne sačme. Okretanjem cijevi u vertikalan položaj, pustimo da sačma 40 puta uzastopno padne vertikalno u cijevi. Pritom se mjerenjem našlo, da se temperatura sačme povisila za 3,8 °C. Pita se, koliki je mehanički ekvivalent topline, prema rezultatu ovog eksperimenta, ako je specifična toplina olova 0,03?*

Rješenje: Pri četrdeset obrtanja cijevi, digli smo sačmu 40 puta po 1,2 *m* visoko. Energija, uložena u sačmu tom radnjom, pretvori se uvijek pri udarcu sačme o dno kutije u toplinu. Imamo, dakle,

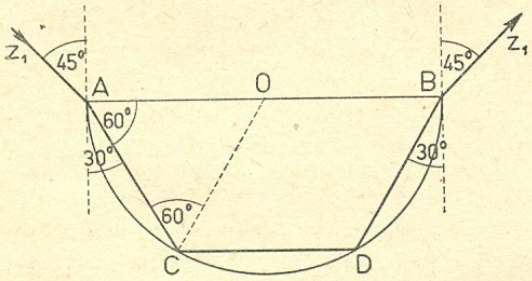
$$E = 40 \cdot mgh = 40 \cdot 4000 \cdot 981 \cdot 120\ erga$$

$$E = \frac{40 \cdot 4000 \cdot 981 \cdot 120}{9{,}81 \cdot 10^7}\ kg^*m = 192\ kg^*m$$

Prema tome imamo:

$$192\ kg^*m = 4 \cdot 0{,}03 \cdot 3{,}8\ kcal$$
$$192\ kg^*m = 0{,}456\ kcal$$
$$1\ kcal = \frac{192}{0{,}456} = 421\ kg^*m.$$

129. *Plosnata staklena poluvaljkasta ploča ima indeks loma* $n = \sqrt{2}$. *Ako na nju pustimo zraku svjetlosti u ravnini presjeka okomitog na os valjka, a pod kutom upadanja* $\alpha = 45°$, *pita se 1. ako zraka* (z_1) *padne na rub ploče (v. sliku u zadacima prošlog broja) u točku A, kakva će biti njena putanja kroz staklenu ploču i u kojoj će točki ploče izaći iz nje, te u kom smjeru; 2. ako zraka* (z_2) *padne na bilo koje drugo mjesto M, gdje bi trebala ležati ta točka M između O i A, pa da zraka izađe iz ploče u smjeru, koji je paralelan upadajućoj zraci?*



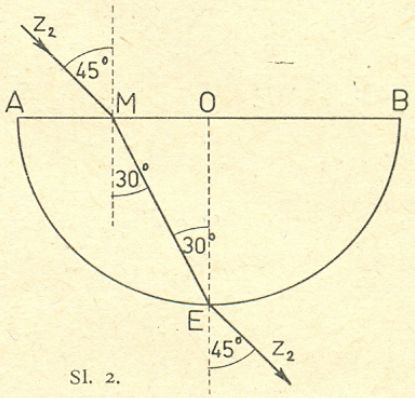
Sl. 1.

Rješenje: 1. Prema zakonu loma bit će (vidi sliku 1.):

$$\frac{\sin 45°}{\sin \beta} = \sqrt{2}$$
$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin 45°}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\beta = 30°.$$

Prema tome je kut $OAC = 90° - 30° = 60°$, pa je AC ($= R$) stranica upisanog šesterokuta. Kod točke C zraka AC čini s normalom OC na prizmu kut od 60°, pa će i totalno reflektirana zraka CD sa OC zatvarati kut od 60°, t. j. CD će također biti stranica upisanog šesterokuta. Isto se ponavlja i sa ponovo reflektiranom zrakom u D, što znači, da će naša zraka z_1 izaći iz staklene ploče u točki B. Kako tu stigne pod kutom od 30° prema okomici, lomit će se pri izlasku iz ploče tako, da u uzduhu (vakuumu) zatvara kut od 45° s okomicom. Prema tome zraka je prolazom kroz staklenu ploču doživjela u cjelosti otklon od 90°.

2. Da bi zraka izišla iz ploče u smjeru, koji je paralelan njoj samoj prije ulaza u ploču, moraju kutovi, što ih zatvara dio zrake ME s normalom u M i E, biti među sobom jednaki. To znači, da te dvije normale moraju biti među sobom paralelne, a to će biti ispunjeno samo ako zraka padne u točku E, u kojoj je tangenta paralelna s graničnom plo-



Sl. 2.

hom AB. Kako je već obrazloženo u točki 1., spomenuti kutovi su 30°, pa je trokut MOE polovica jednakostraničnog trokuta. Prema tome će biti, po formuli za visinu takvog trokuta:

$$OE = R = MO \cdot \sqrt{3}$$
$$MO = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

130. *Turbina, u koju svake sekunde pada 1,5* m^3 *vode s visine od 200 m, tjera generator izmjenične struje. Ukupan stupanj djelovanja je tu 70%. Dobivena električna energija transformira se u transformatoru, koji ima stupanj djelovanja 95%, na visoku napetost za dalekovod. U dalekovodu se gubi daljih 10% energije. Koliko se snage, izražene u kilokalorijama (sek, može dobiti sa polova transformatora jednakog onom prvome), priključenog na drugom kraju dalekovoda?*

Rješenje: Dobivena snaga S na polovima drugog transformatora, bit će:

$$S = \frac{1500 \cdot 200 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}95}{427}\ kcal/sek$$
$$S = 400\ kcal/sek.$$

Rješavatelji fiz. zadataka iz 2. broja

Kosec Vladislav, 8. r. XII. g. Ljubljana, 126 (djelom.), 127, 128, 129 (toč. 2), 130; *Šimunić Bruno*, 8. d r. IV. g. Zagreb, 126 (djel), 128, 129; *Мирић Јовица*, 8 раз. г. Сомбор, 129 (тач. 2), *Orepić Stjepko*, 8. c r. g. Nova Gradiška, 126 (djelom.), 128, 129 (djelom.); *Oreški Vlado*, 6. a r. II. gimn. Zagreb, 126; *Tintar Milenko*, 7. c raz. g. Stari Bečej, 126

(djelom.); *Miketinac Milivoj*, 7. d raz. III. g. Zagreb, 126 (djelom.), 130; *Маринов Трпче*, 8 р. г. Битола, 126 (делом.), 127 (делом.); *Hunjadi Janko*, 8. c r. g. Vinkovci, 128, 129 (djelom.), *Ranković Borko*, 7_3 r. g. Kruševac, 126 (djelom.); *Teodoresku I. Ljubinka*, uč. 7.a razr. gimnazije Senta, 126; *Peterlin Peter*, uč. VIII. g. Ljubljana, 128, 129; *Дрешевић Милан*, уч. 8 *c* раз. г. Бања Лука, 129; *Basar Ivan*, uč. 7. b r. g. Karlovac, 126, 127, 128, 129, 130; *Ђорђевић Живојин*, уч. $VIII_4$ раз. гимн. Прокупље, 126, 127, 128, 130; *Надрљански Сава*, уч. 7*b* р. г. »Урош Предић«, Панчево, 126; *Gros Mladen*, uč. 6. a raz. kl. gimn. Ljubljana, 126, 127, 128, 130; *Јеремић Душан*, уч. 8_3 р. г. »Св. М.« Ниш, 126, 130; *Lojen Miroslav*, uč. 6a r. g. Varaždin, 126, 127, 128, 129; *Lajevec Tine*, 6a r. kl. g. Ljubljana 126 (djel.); *Beliza Branko* uč. 6a r. 2. g. Zagreb, 126; *Todorović Milenko*, uč 3b r. S. T. Š. Mostar, 126, 127, 128, 130.

Vježbe u matematici za učenike viših razreda gimnazije

O ispoređivanju zadanih brojeva s korijenima kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$

Ako razmatramo zadatke, što ih dajemo za rješavanje učenicima, susret ćemo se kadšto s takvim zadacima, gdje rješenje ima samo onda smisla, kad se ono nalazi između 2 zadana broja. U tom slučaju treba odrediti one vrijednosti općeg broja, koji u jednadžbi dolazi (ili parametra), za koji je taj uvjet ispunjen.

Tako na pr. treba li riješiti trigonometrijsku jednadžbu

$$m \sin^2 x - (2m - 3) \sin x + 7 - 3m = 0,$$

moramo također odrediti vrijednosti od m, za koje se rješenje nalazi između -1 i $+1$. Kad bismo riješili tu jednadžbu samo po $\sin x$, a ne bismo ništa rekli o položaju korijena te jednadžbe prema brojevima -1 i $+1$ za razne vrijednosti od m, zaista ne bismo mogli reći, da smo došli do rješenja zadane jednadžbe.

Isporedi na pr. zadatke našeg lista br. 190, 201, 202, 212, 220, 225, 234, 237, 238.

Ima učenika, koji vrlo pronicavo pristupaju rješavanju zadataka, ali provođenje diskusije do kraja nekim učenicima zadaje izvjesnih poteškoća. Zato smo odlučili, da učenike potanko uputimo, kako se ta diskusija vrši.

Preporučamo učenicima, da ove retke pomno pročitaju i da se o njima malo zamisle. Bez razmišljanja ne će ih moći potpuno razumjeti. Ako ipak kojem učeniku ne bi štogod bilo razumljivo, neka se obrati na nas; mi smo rado spremni da mu damo i daljnja potanka objašnjenja

Diskusija, o kojoj ćemo govoriti, osniva se uglavnom na osnovnom svojstvu kvadratne funkcije, za koje držimo, da je učenicima poznato i koje se može ovako izreći:

a) Ako je $b^2 - 4ac < 0$, *kvadratna je funkcija* $y = ax^2 + bx + c$ *uvijek t. j. za svaku realnu vrijednost od* x *istog znaka kao i* a.

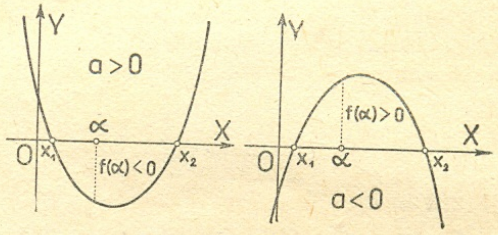
b) Ako je $b^2 - 4ac = 0$, *ona je uvijek istog znaka kao i* a *izuzevši za* $x = -\frac{b}{2a}$, *kad je ona jednaka nuli.*

c) Ako je $b^2 - 4ac > 0$, *tad je ona uvijek istog znaka kao i* a *izuzevši za vrijednosti od* x, *koje se nalaze između njezinih korijena* x_1 *i* x_2. *Tad je ona protivna znaka od* a. *Za* x_1 *i* x_2 *ona je jasno jednaka nuli.*

Na pr. funkcija $y = 8x^2 - 6x + 5$ uvijek je pozitivna, funkcija $8x^2 - 6x - 5$ je negativna samo za vrijednosti od x između $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_1 = \frac{5}{4}$, inače je pozitivna.

Ispoređivanje zadanog broja α *prema korijenima kvadratne jednadžbe* $ax^2 + bx + c = 0$.

Na osnovu pređašnjeg poučka možemo zaključiti ovo: neka je $f(\alpha)$ brojna vrijednost kvadratne funkcije $ax^2 + bx + c$ za $x = \alpha$; tad izlazi



Sl. 1.

Sl. 2.

Ako je $f(\alpha)$ *protivna znaka od* a *t. j. ako je* $af(\alpha) < 0$, *broj je* α *sadržan između* x_1 *i* x_2 *t. j.* $x_1 < \alpha < x_2$. (Vidi i sl. 1. i 2.)j

U tom slučaju kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$ ima sigurno realne korijene, te nije nužno načiniti diskriminantu.

I obrnuto, broj α bit će sadržan između korijena, ako je $af(\alpha) < 0$.

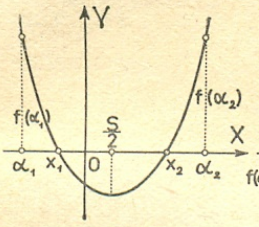
Primjer: Koji je položaj broja 2 prema korijenima jednadžbe $2x^2 - x - 15 = 0$?

Budući da je $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 - 15 = -9$ t. j. < 0, $a = 2$ t. j. > 0, to je $2f(2) < 0$, što znači, da je broj 2 između korijena.

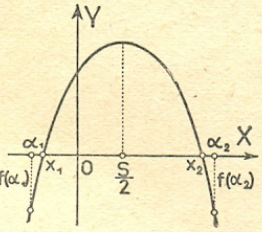
Ako je $f(\alpha)$ istog znaka kao i a t. j. ako je $af(\alpha) > 0$ i ako je uz to $D \geqq 0$, broj α nalazi se izvan intervala korijena x_1 i x_2 t. j. on je

ili ispred oba korijena (na pr. α_1 u sl. 3 i 4) ili je iza oba korijena (na pr. α_2 u sl. 3 i 4).

Pita se sad, kad je α ispred korijena, a kad je $x_1 < x_2 < \alpha$. Da odgovorimo na to pitanje,



Sl. 3.



Sl. 4.

treba da isporedimo α s jednim brojem, koji se nalazi između korijena. Za taj je broj najzgodnije uzeti polovinu zbroja korijena

$$\frac{S}{2} = -\frac{b}{2a},$$

ona se sigurno nalazi između korijena*.

Ako je $\alpha < -\frac{b}{2a}$, onda je $\alpha < x_1 < x_2$; ako je $\alpha > -\frac{b}{2a}$ onda je $x_1 < x_2 < \alpha$.

Nejednakost $\alpha < -\frac{b}{2a}$ možemo i ovako pisati: $\alpha + \frac{b}{2a} < 0$ ili $\frac{2a\alpha + b}{2a} < 0$, ili, ako množimo s a^2, $a(2a\alpha + b) < 0$. Ako s $f'(x)$ označimo funkciju $2ax + b$, tad možemo reći:

Broj α je ispred korijena, ako su ispunjena ova tri uvjeta: 1) $D \geqq 0$, 2) $af(\alpha) > 0$, 3) $af'(\alpha) < 0$.

Slično se dokazuje, *da je broj α iza korikorijena, ako su ispunjeni uvjeti: 1) $D \geqq 0$, 2) $af(\alpha) > 0$ i 3) $af'(\alpha) > 0$.*

Primjer: Koji je položaj broja -2 prema korijenima jednadžbe $-x^2 + 4x + 5 = 0$? D je > 0, jer su a i c protivno označeni. Načinimo $f(-2) = -4 - 8 + 5 = -7$, dakle je $af(-2) = (-1)(-7) = 7$ t. j. > 0. Prema tomu je -2 izvan intervala korijena. Načinimo još $af'(-2)$, $f'(x) = -2x + 4$, $f'(-2) = 4 + 4 = 8$, pa je $(-1)(+8) = -8$ t. j. < 0, što znači, da je -2 ispred korijena.

U tom primjeru bilo bi možda jednostavnije izračunati korijene, te bi se onda mogao odmah odrediti traženi položaj, međutim navedeni je postupak jedini moguć, kad u jednadžbi dolaze opći brojevi (parametri).

Iz $x_1 < x_2$ izlazi $2x_1 < x_1 + x_2$ i $2x_2 > x_1 + x_2$ t. j.

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \quad \text{ili} \quad x_1 < \frac{S}{2} < x_2,$$

što izlazi i neposredno iz grafičke predodžbe.

Primjer. Neka se odredi m tako, da su oba korijena jednadžbe

$$x^2 - 2(m+1)x + 2m + 5 = 0$$

veća od -2.

Mora biti 1) $D'^* = (m+1)^2 - (2m+5) \geqq 0$ ili $m^2 - 4 \geqq 0$, $-\infty < m \leqq -2$, $2 \leqq m < \infty$; 2) $af(-2) > 0$ ili $6m + 13 > 0$, $m > -\frac{13}{6}$, 3) $af'(-2) < 0$ ili $-6 - 2m < 0$, $m > -3$. Svi su ti uvjeti ispunjeni za

$$-\frac{13}{6} < m \leqq -2, \quad 2 \leqq m < \infty.$$

Isporedivanje zadanih brojeva α i β s korijenima kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$.

Zadani brojevi α i β mogu imati ove položaje prema korijenima kvadratne jednadžbe:

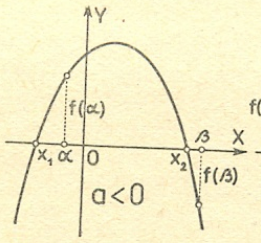
1) $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$, 2) $\alpha < x_1 < \beta < x_2$, 3) $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, 4) $x_1 < x_2 < \alpha < \beta$, 5) $\alpha < \beta < x_1 < x_2$ i 6) $x_1 < \alpha < \beta < x_2$.

U prvom je slučaju $af(\alpha) < 0$, $af(\beta) > 0$, u drugom je slučaju $af(\alpha) > 0$, $af(\beta) < 0$. U oba je slučaja dakle

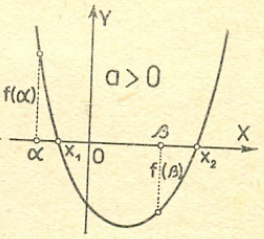
$$a^2 f(\alpha) f(\beta) < 0 \quad \text{ili} \quad f(\alpha) f(\beta) < 0.$$

Dakle: *Uvjet $f(\alpha) f(\beta) < 0$ mora biti ispunjen, ako je samo 1 korijen jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ sadržan između α i β.*

Za $af(\alpha) < 0$, α je sadržano između korijena, za $af(\beta) < 0$ je β sadržano između korijena. (Vidi sl. 5 i 6).



Sl. 5.



Sl. 6.

Primjeri. 1. Koji je položaj brojeva -1 i 5 prema korijenima od $x^2 - 2x - 8 = 0$?

$f(-1) < 0$, $f(5) > 0$, $f(-1) f(5) < 0$, $af(-1) < 0$, pa je $x_1 < -1 < x_2 < 5$.

2. Za koje je vrijednosti od m samo jedan od korijena jednadžbe

$$(2m-3)x^2 + 2(m+1)x + m + 7 = 0$$

sadržan između -2 i $+2$?

* S D' označujemo kvocijent od D i broja 4.

Mora da je $f(-2)\,f(2) < 0$, ili kako je

$$f(-2) = 5m-9,\quad f(2) = 13m-1,$$

$$(5m-9)(13m-1) < 0 \quad \text{t. j.} \quad \frac{1}{13} < m < \frac{9}{5}.$$

Razmatrajmo sad slučaj 3: Kad su oba korijena jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ sadržana između α i β?

Korijeni moraju prije svega biti realni t. j. 1) $D \geqq 0$; α i β moraju biti izvan intervala korijena, dakle 2) $af(\alpha) > 0$, 3) $af(\beta) > 0$; α mora biti ispred, a β iza korijena t. j. 4) i 5) $\alpha < \frac{S}{2} < \beta$. Oba posljednja uvjeta mogu se, kako smo vidjeli, jednostavnije pisati

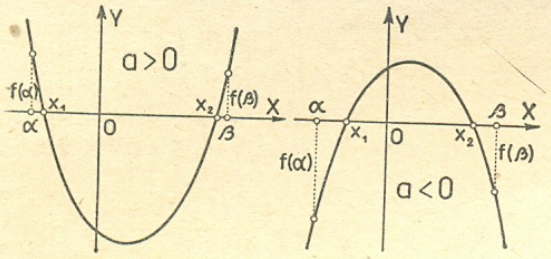
$$af'(\alpha) < 0,\quad af'(\beta) > 0$$

ili zajedno $f'(\alpha)\,f'(\beta) < 0$, gdje je $f'(x) = 2ax + b$.

Prema tomu, oba su korijena sadržana između α i β, ako su ispunjeni ovi uvjeti:

1) $D \geqq 0$, 3) $af(\alpha) > 0$, 3) $af(\beta) > 0$, 4) $f'(\alpha)\,f'(\beta) < 0$.

Vidi sl. 7 i 8.



Sl. 7.

Sl. 8.

Primjer 1. Da li su oba korijena jednadžbe $-2x^2 + 5x + 7 = 0$ sadržana između -2 i 4?

D je > 0, $f(-2) = -11$, $af(-2)$ je > 0, $f(4) = -5$, $af(-4)$ je > 0; $f'(x) = -4x+5$, $f'(-2)\,f'(4) = 13(-11)$ je < 0; dakle su svi gornji uvjeti ispunjeni, pa su oba korijena doista sadržana između -2 i 4.

Primjer 2. Za koje su vrijednosti od m oba korijena jednadžbe

$$(3m + 2)x^2 - 2(m-1)x - m + 1 = 0$$

sadržana između -2 i $+2$?

$$D' = 4m^2 - 3m - 1 = 4\left(m + \frac{1}{4}\right)(m-1),$$

D je $\geqq 0$, ako se m ne nalazi između $-\frac{1}{4}$ i 1; $f(-2) = 15m + 5$, $f(2) = 7m + 13$; $(3m + 2)\,f(-2) = 5(3m + 2)(3m + 1) > 0$, kad se m ne nalazi između $-\frac{2}{3}$ i $-\frac{1}{3}$, $(3m + 2)\,f(2) = (3m + 2)(7m + 13) > 0$ za vrijednosti od m, koje se ne nalaze između $-\frac{13}{7}$ i $-\frac{2}{3}$; $f'(-2) = -14m - 6$, $f'(2) = 10m + 10$, $(-14m - 6)(10m + 10) < 0$ ili $20(7m + 3)(m + 1) > 0$ za m, koji se ne nalaze između -1 i $-\frac{3}{7}$. Svi su ti uvjeti ispunjeni za

$$-\infty < m < -\frac{13}{7},\quad -\frac{1}{3} < m \leqq -\frac{1}{4},$$

$$1 \leqq m < \infty.$$

Samo je jedan korijen sadržan između -2 i 2 za $f(-2)\,f(2) < 0$ ili $(3m+1)(7m+13) < 0$ t. j. za $-\frac{13}{7} < m < -\frac{1}{3}$.

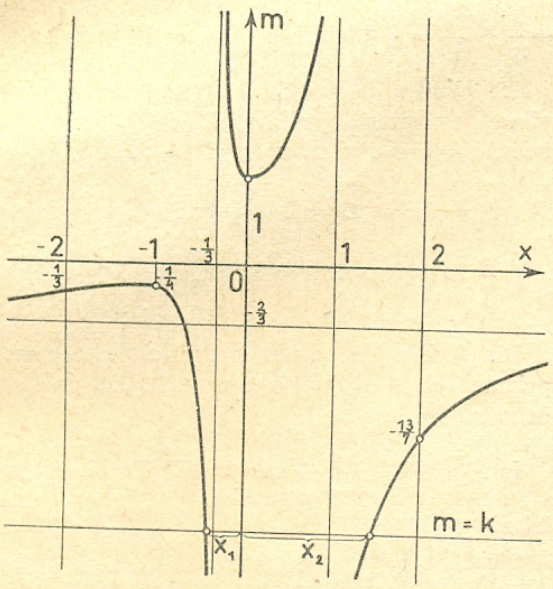
Uvjete za ostale slučajeve neka učenici ispituju sami.

Drugi jedan način rješavanja takvih zadataka dan je u god. V. našeg lista, br. 4, str. 156., pa molimo učenike, da taj članak pogledaju i da ga prouče. Služeći se tim načinom neki su učenici uspješno rješavali zadatke.

Grafički način rješavanja, kojim se zorno možemo uvjeriti o točnosti dobivenih rezultata, dan je članku od prof. Save Markovića u broju 2 našeg lista od ove godine. Mi ćemo također pokazati, kako se taj zadatak može grafički riješiti.

U tu svrhu treba da predočimo funkciju $m = \frac{-2x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 2x - 1}$, koja se dobiva iz zadane jednadžbe, ako je riješimo po m. Našli smo, da je D jednako $16\left(m + \frac{1}{4}\right)(m-1)$. Za realnost od x izlazi da mora biti $m \leqq -\frac{1}{4}$ i $m \geqq 1$; dakle je $-\frac{1}{4}$ maksimum funkcije, a 1 minimum funkcije. Vrijednosti od x, za koje funkcija poprima maksimum ili minimum izlaze iz jednadžbe $(3m + 2)x^2 - 2(m-1)x - m + 1 = 0$, ako se stavi $m = -\frac{1}{4}$ i $m = 1$. Dobiva se $x = -1$, $x = 0$; dakle za $x = -1$ funkcija poprima maksimum $-\frac{1}{4}$, a za $x = 0$ minimum 1. Kad $x \to \pm\infty$, $m \to -\frac{2}{3}$; nazivnik $3x^2 - 2x - 1 = 0$ za $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$; za te vrijednosti m je prekidno i za prvu vri-

jednost skače od $-\infty$ do $+\infty$, za drugu vrijednost od $+\infty$ do $-\infty$. Za $x = -2$, $m = -\frac{1}{3}$, za $x = 2$, $m = -\frac{13}{7}$. Uzevši sve to u obzir možemo lako nacrtati sliku funkcije.



Nacrtajmo sad pravac $m = k$, pa uzmimo da k poprima sve vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$. Sjecišta tog pravca s krivuljom određuju x_1 i x_2, pa iz slike lako očitamo, za koje se vrijednosti od m samo jedan ili oba korijena nalaze između -2 i $+2$.

Vježbe iz matematike za prijemni ispit*

za učenike 8. r. osmog. škole (i 4. r. gimn.)

Riješi ove jednadžbe:

1. $(x - a - b)^2 = x^2 - (a - b)^2$

$x^2 - 2ax + a^2 - 2bx + 2ab + b^2 =$
$= x^2 - a^2 + 2ab - b^2$
$-2ax - 2bx = -2a^2 - 2b^2$
$-2x(a + b) = -2(a^2 + b^2)$
$x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$

2. $(8x - 3)^2 + (15x - 4)^2 = (17x - 5)^2 + 4,$

$64x^2 - 48x + 9 + 225x^2 - 120x + 16 =$
$= 289x^2 - 170x + 25 + 4$
$2x = 4, \quad x = 2.$

3. $(x - 2)^3 + (x + 2)^3 + (x - 6)^3 =$
$= 3(x - 2)(x + 2)(x - 6)$
$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 +$
$x^3 - 18x^2 + 108x - 216 = 3(x^2 - 4)(x - 6),$
$3x^3 - 18x^2 + 132x - 216 =$
$= 3x^3 - 12x - 18x^2 + 72$
$144x = 288$
$x = 2.$

4. $(x - 3)^3 - (x + 9)(x - 9)^2 = 0$

$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - (x^2 - 81)(x - 9) = 0$
$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 9x^2 + 81x - 729 = 0$
$108x = 756$
$x = 7.$

5. $\frac{2x-3}{15} - \frac{4x-9}{20} = \frac{8x-27}{30} - \frac{16x-81}{24} - \frac{9}{40}$

$v(15, 20, 30, 24, 40) = v(24, 30, 40) = 120;$
množenjem sa 120 izlazi
$16x - 24 - 24x + 54 = 32x - 108 - 80x + 405 - 27$
$40x = 240, \quad x = 6.$

6. $\frac{a^2 - x}{a} - \frac{2x}{b} = \frac{x - a^2}{a} - \frac{x + a^2}{b},$

Množenjem s ab dobivamo
$a^2b - bx - 2ax = bx - a^2b - ax - a^3$
$-2bx - ax = -2a^2b - a^3$
$-x(a + 2b) = -a^2(a + 2b)$
$x = a^2.$

7. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{5}\left[\frac{x}{4} - \frac{1}{7}\left(\frac{x}{6} - 3\right)\right]\Big\} =$

$= \frac{1}{7}\left(5x + \frac{3x - 8}{5}\right), \quad \frac{x}{2} + \left\{\frac{x}{3} - \frac{1}{5}\left[\frac{x}{4} - \right.\right.$

$- \left.\left.\frac{x}{42} + \frac{3}{7}\right]\right\} = \frac{5}{7}x + \frac{3x - 8}{35}, \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{3} -$

$- \frac{x}{20} + \frac{x}{210} - \frac{3}{35} = \frac{5}{7}x + \frac{3x - 8}{35}$

$v(2, 3, 20, 210, 35{,}7) = v(20, 210) = 420.$

Množenjem s 420 dobivamo
$210x + 140x - 21x + 2x - 36 = 300x + 36x - 96$
$-5x = -60, \quad x = 12.$

8. $\left(\frac{x + 3}{5}\right)^2 - \left(\frac{x - 2}{5}\right)^2 = -\frac{7}{5}$

$\frac{x^2 + 6x + 9}{25} - \frac{x^2 - 4x + 4}{25} = -\frac{7}{5}$

$x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x - 4 = -35$
$10x = -40, \quad x = -4.$

9. Iz Zagreba krene prema Beogradu brzi vlak, koji na sat prevaljuje 64 km; u isto doba krene iz Novske u istom smjeru osobni vlak, koji na sat prevaljuje 44 km; iza koliko sati i u kojoj će udaljenosti od Zagreba brzi vlak stići osobni? Udaljenost Zagreb — Novska je 106 km.

Brzi će vlak stići osobni za x sati; put, što ga ima da prevali brzi vlak, mora biti jednak

* Za učenike u onim Narodnim republikama, gdje se taj ispit održava.

106 *km* više putu, što ga za x sati prevali osobni vlak. Imamo

$$64x = 106 + 44x$$
$$20x = 106,\ x = 5{,}3 \text{ sati};$$

za to vrijeme brzi vlak prevali 339,2 *km*.

10. Zbroj znamenaka dvoznamenkasta broja je 13; zamijene li se među sobom znamenke, novi je broj za 27 veći od pređašnjega. Koji je to broj?

Ako je x znamenka desetica, $13 - x$ je znamenka jedinica, a broj je $10x + 13 - x$; zamijene li se među sobom znamenke, novi je broj

$$10(13 - x) + x, \quad \text{pa je}$$
$$10(13 - x) + x = 10x + 13 - x + 27.$$

Odatle izlazi $x = 5$, a broj je 58.

11. Znamenka je jedinica 3-znamenkasta broja 9; stavi li se taj broj na mjesto stotica, dobije se $\frac{4}{3}$ broja. Koji je to broj?

Ako je broj, što ga čine znamenka stotica i desetica x, troznamenkasti je broj $10x+9$; stavi li se 9 na mjesto stotica, novi je broj $900 + x$, pa je $900 + x = \frac{4}{3}(10x + 9)$, odakle izlazi

$$2700 + 3x = 40x + 36,$$
$$x = 72, \text{ broj je } 729.$$

12. Kad bi se neka roba prodala za 2340 *Din*, iznosi gubitak $2\frac{1}{2}\%$; koliko bi iznosio dobitak, ako se ona proda za 2472 *Din*?

Moramo najprije izračunati, koliko je roba stajala; ako je ona stajala x *Din*, to je

$$x - \frac{2{,}5x}{100} = 2340, \quad x = 2400 \text{ Din};$$

dobitak bi bio dakle 72 *Din*, a od 2400 *Din* to je $\frac{7200}{2400} = 3\%$.

13. Glavnica od 56000 *Din* daje godišnje isto toliko kamata, kao glavnica 60000 *Din* uložena uz $\frac{1}{4}\%$ manje. Uz koliko su % uložene obje glavnice?

Ako je prva uložena uz $x\%$, to je

$$\frac{56000x}{100} = \frac{60000\,(x - \frac{1}{4})}{100} \quad \text{ili}$$

$$56x = 60x - 15,\ 4x = 15,\ x = 3{,}75\%.$$

14. Posuda se može na dvije cijevi isprazniti za 3 minute, ako se pak otvori samo jedna cijev, isprazni se posuda za 8 minuta. Za koliko će se minuta posuda isprazniti samom drugom cijevi?

Ako se posuda isprazni na 2 cijevi za 3 minute, u 1 minuti isprazni se $\frac{1}{3}$ posude, prvom cijevi isprazni se u 1 minuti $\frac{1}{8}$ posude; ako druga cijev treba x minuta, u 1 minuti isprazni se $\frac{1}{x}$ posude. Iz

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \text{ izlazi } x = \frac{24}{5} = 4{,}8 \text{ minute.}$$

15. Kolika je površina i zapremina pravilne šestostrane prizme, kojoj je osnovna ivica $a = 6$ *cm*, a visina $v = 12$ *cm*?

$$P = 2B + O = 2 \cdot \frac{6a^2}{4}\sqrt{3} + 6av =$$
$$= 3a^2\sqrt{3} + 6av = 3a\,(a\sqrt{3} + 2v) =$$
$$= 108\,(\sqrt{3} + 4) \approx 619{,}056 \text{ cm}^2.$$

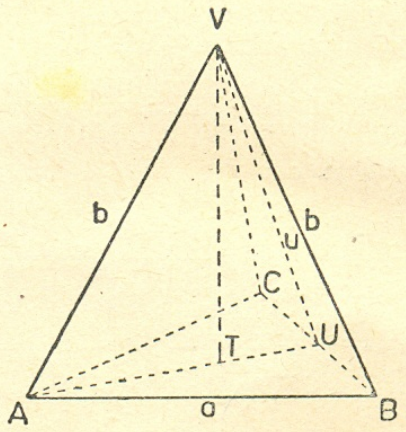
16. Kolika je visina pravilne šestostrane prizme, ako joj je površina 331,056 cm^2, a osnovna ivica 6 cm^2?

Iz $P = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 6av$ ili $P = 3a^2\sqrt{3} + 6av$ izlazi

$$v = \frac{P - 3a^2\sqrt{3}}{6a} \approx \frac{331{,}056 - 187{,}056}{36} = 4 \text{ cm}.$$

17. Izračunaj površinu i zapreminu pravilne trostrane piramide, koja ima

a) osnovnu ivicu $a = 30$ *cm*, a bočnu ivicu $b = 25$ *cm*,



b) $a = 12$ *cm*, bočnu visinu $u = 8$ *cm*.

a) $u = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{625 - 225} = 20$ *cm*,

$P = B + O$, gde je O omotač piramide,

$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3a}{2}u = \frac{a}{4}\,(a\sqrt{3} + 6u) =$$
$$= 225\,(\sqrt{3} + 4) \approx 1289{,}7 \text{ cm}^2.$$

Da izračunamo zapreminu, treba odrediti visinu piramide $VT = v$; poznato je, da je

$AT = \frac{2}{3}$ visine ravnostranog trougla strane a t. j. jednako $\frac{2}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, a TU jednako $\frac{1}{3}$ te visine t. j. $\frac{a}{6}\sqrt{3}$. Zato je

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}, \text{ pa je}$$

$$V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} =$$

$$= \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2} = 75\sqrt{975} =$$

$$= 375\sqrt{39} \approx 2341{,}875\ cm^3.$$

b) $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3a}{2}u = \frac{a}{4}(a\sqrt{3} + 6u) =$

$= 36(4 + \sqrt{3}) \approx 206{,}352\ cm^2.$

$$V = \frac{Bv}{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{u^2 - \frac{a^2}{12}}, \text{ jer je}$$

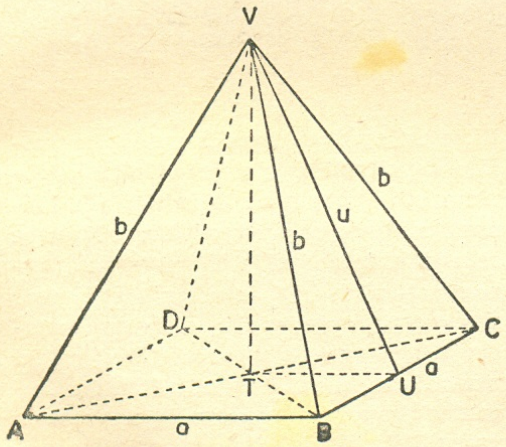
$$v = \sqrt{u^2 - \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2}; \quad V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3u^2 - \frac{a^2}{4}} =$$

$$= 12\sqrt{156} \approx 149{,}88\ cm^3.$$

18. Izračunaj površinu i zapreminu kvadratske piramide, kojoj je zadano

a) $b = 10\ cm, \quad u = 8\ cm,$

b) $u = 25\ cm, \quad v = 7\ cm.$



a) $P = a^2 + 2au, \quad \frac{a}{2} = \sqrt{b^2 - u^2}, \quad P = 4(b^2 - u^2) + 4u\sqrt{b^2 - u^2} = 144 + 192 = 336\ cm^2,$

$$V = \frac{a^2}{3}v = \frac{4(b^2 - u^2)}{3}\sqrt{2u^2 - b^2} =$$

$$= 96\sqrt{7} \approx 254{,}0\ cm^3.$$

b) $a = 2\sqrt{u^2 - v^2}, \quad P = 4(u^2 - v^2) + 4u\sqrt{u^2 - v^2} = 4 \cdot 1176 = 4704\ cm^2.$

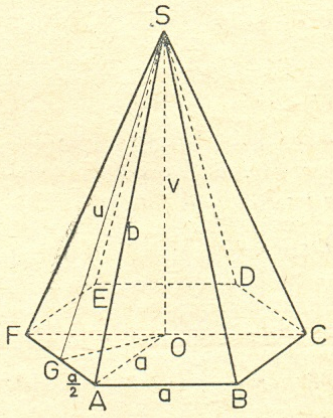
$$V = \frac{a^2}{3}v = \frac{4(u^2 - v^2)}{3}v = 5376\ cm^3.$$

19. Izračunaj površinu i zapreminu pravilne šestostrane piramide, kojoj je zadano

a) $a = 30\ cm, \quad b = 50\ cm,$

b) $u = 14\ cm, \quad v = 11\ cm.$

c) $a = 24\ cm, \quad u = 36\ cm.$



a)

$$P = B + O = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} + 6\frac{a}{2}u = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} +$$

$$+ 3a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = 450(3\sqrt{3} + \sqrt{91}) =$$

$$= 6630{,}75\ cm^2.$$

$$V = \frac{1}{3}\frac{6a^2}{4}\sqrt{3}v = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}\sqrt{b^2 - a^2} =$$

$$= 18000\sqrt{3} \approx 31\,176\ cm^3.$$

b) Iz $\triangle SOG$ izlazi $\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 = u^2 - v^2$ ili $a^2 = \frac{4}{3}(u^2 - v^2) = 100, \quad a = 10\ cm,$ zato je

$$P = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} + 3au =$$

$$= \frac{3a}{2}(a\sqrt{3} + 2u) \approx 679{,}8\ cm^2,$$

$$V = 50\sqrt{3} \cdot 11 \approx 952{,}6\ cm^3.$$

c) $P = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3au = \frac{3a}{2}(a\sqrt{3} + 2u) =$

$$= 864(\sqrt{3} + 3) \approx 4088{,}448\ cm^2,$$

$$V = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{v}{3} =$$

$$= 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{u^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{12u^2 - 9a^2} = 144\sqrt{10368} =$$

$$= 144 \cdot 72\sqrt{2} \approx 14660{,}352\ cm^3.$$

20. Obujam pravilne šestostrane piramide je $V = 12\ cm^3$, izračunaj osnovnu ivicu, ako je ona jednaka polovini bočne ivice.

Iz $6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{b^2 - a^2} = 12$ ili, jer je $b = 2a$, $\frac{a^2}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{3a^2} = 12$, $a^3 = 8$, $a = 2\ cm$.

Ispravi iz broja 1. i 2. ove štamparske pogreške: str. 40, red. 2. odozgo mjesto $-(-x^2$ stavi $-(-3x^2$; str. 76, zad. 222. 4. red odozdo u prvom faktoru treba da bude $-6d$ mjesto $+6d$; str. 86, u zad. 2. 5. red odozdo mjesto $-15\ (9a^4\ldots$ treba da bude $+15\,(9a^4\ldots$ tako, da u rezultatu mjesto $9a^4 + 296a^3 - 15a^2$ dolazi $279a^3 - 424a^3 + 465a^2$. Sitne štamp. greške neka čitalac ispravi sam.

Rješenje križaljke iz br. 2 i nagrađeni rješavatelji

Vodoravno		*Uspravno*	
2 —	371 293	1 —	665 334
6 —	6480	2 —	3825
8 —	59	3 —	70
9 —	512	4 —	252
10 —	4272	5 —	9975
12 —	512	7 —	41
14 —	55	10 —	429
15 —	36	11 —	250 997
17 —	997	13 —	195
19 —	4425	16 —	6467
21 —	999	18 —	7983
23 —	61	20 —	216
24 —	7899	22 —	99
25 —	776 223	24 —	72

Pogreškom kod štampanja izostavljen je pod 10. vodoravno iznad znaka korijena broj 3, što je velika većina rješavatelja zapazila.

Između 147 ispravnih rješenja ždrijebom su izvučena rješenja ovih učenika:

1. Fatović Svetko, 7.a r. g. Zadar
2. Jeremić Dušan, 8_3 r. g. »Svet. Marković« Niš
3. Kanoni Jasna, 8.b r. 10. g. Ljubljana
4. Kovač Antal, 6_5 r. g. Sombor
5. Kulišić Petar, 7.a r. g. Dubrovnik
6. Letić Katarina, 5.d r. g. Subotica
7. Marinov Trpče, 8_5 kl. gimn. »J. B. Tito« Bitola
8. Nadrljanski Sava, 7_6 r. g. »Uroš Predić« Pančevo
9. Todorović Milenko, 3b r. Srednje tehničke škole Mostar
10. Zaharija Dubravka, 5.b r. 9. g. Zagreb.

Rješavatelji su nagrađeni knjigom: Polya, Kako ću riješiti matematički zadatak?

Naknadno stigla rješenja

Gros Mladen, uč. 6.a r. kl. g. Ljubljana, 233, 236; *Kanoni Jasna*, uč. 8b r. 10. g. Ljubljana, 229, 234, 236, 237, 238, 239; *Lojen Miroslav*, uč. 6.a r. g. Varaždin, 236; *Marjanović Nikola*, uč. 7.a r. 2. g. Celje, 230, 233; *Todorović Milenko*, uč. 3b m. r. S. T. Š., Mostar, 228, 230, 233, 236; *Божилов Славчо*, уч. 8а р. г. Босилеград, 229, 232, 233, 236; *Ђуровић Гордана*, уч. 5_4 р. г. Ваљево, 236; *Ковијанић Предраг*, уч. 8_3 р. гимн. Аранђеловац, 230, 232, 233. *Marković Olga*, uč. 7_1 razr. gimn. Uroševac, 230, 236_β; *Mesaroš Andraš*, uč. 7_5 r. g. Sombor, 229, 231, 232, 236; *Милошевић Миодраг*, уч. 7 р. г. Урошевац, 229, 230, 233, 236; *Molnar Imre*, uč. 8_5 r. g. Sombor, 232, 233, 235, 236; *Jović S. Dragoljub* uč. 8_2 r. g. Vlasotince, 127; *Molnar Imre*, uč. 8_5 r. g. Sombor, 129.

Iz uredništva

Pošto je uredio 2. broj, glavni urednik našeg lista prof. Više pedagoške škole u Zagrebu Alfred Kurelec zbog velike zauzetosti svojim redovnim poslovima kao i zbog preuzimanja novih dužnosti zahvalio se na uredništvu. Naša se redakcija teško odijelila od svog glavnog urednika, koji je u naš list ulagao sve svoje znanje, svoje požrtvovno zalaganje, svu svoju savjesnost i svoj veliki trud. Doba njegova urednikovanja karakterizirano je svestranim napretkom našeg lista. Redakcija izriče i tim putem prof. Kurelcu svoju toplu zahvalnost za njegov uspješni rad. Glavno uredništvo lista povjerilo je Društvo matematičara i fizičara NRH, sveuč. doc. dr. Branimiru Markoviću, a u redakcioni odbor lista ušli su i profesori Elza Vernić i Milan Krajnović.

Математичка укрштеница

ТОМИСЛАВ Д. НИКОЛИЋ, Београд

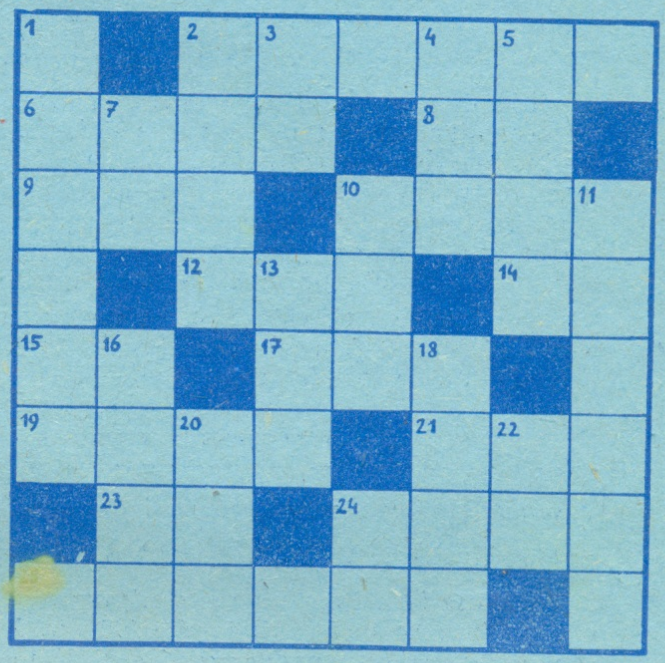
У свако квадратно поље не долази по једно слово, већ по једна арапска цифра! Децималне запете не треба уносити.

Водоравно:

2. Средње растојање Месеца од Земље (заокружено на 10 *km*) ако је средња паралакса $p = 57'$ а R Земље 6370 *km*.
6. Збир свих целих бројева од 1 до 100.
8. Број коме производ двају његових сабирака износи 396, а разлика истих сабирака је 25.
9. Троцифрен број, чија је свака цифра за 1 мања од своје леве суседне цифре, а кад се тај број подели збиром цифара, добија се 48.
10. Четвороцифрен број, чија је највиша цифра 5. Кад њу преместимо са места хиљада на место јединица, добијамо број који је за 2592 мањи од претходног броја.
12. Најмањи троцифрен број.
14. Квадрат производа решења система једначина: $2x + y - z = 0$, $x + 2y + z = 3$, $x - y + 2z = 9$ умањен за 1.
15. Количник односа запремина правилног октаедра и коцке, ако су центри страна првог тела темена другог тела.
17. Број 520 поделити на 3 дела, па уписати други број, ако се зна да је први број $\frac{5}{7}$ другога, а трећи 2 пута већи од другога.
19. Број секунди у $2° 36' 36''$.
21. Однос обима и пречника круга.
23. $\sqrt{841} \cdot 24 \cdot 1957 \cdot 4 - 2(15 + 13 \cdot 26) \cdot 25 : log 99$.

Усправно:

1. Површина стране коцке чија запремина износи 0 698 457 mm^3.
2. Решење се добија кад се иза 14. водоравно допишу обрнутим редом цифре решења под 22. усправно.
3. Већа страна правоугаоника чији је обим 200 *cm*, ако је она 4 пута већа од краће стране.
4. $\sqrt[3]{2\,863\,288}$.
5. Решење под 24. водор. $+ 41^2 - 4\sqrt{100}$.
7. 1 : 3 (приближно).
10. Производ броја дијагонала квадрата и 24-угла.
11. Наћи вредност израза $(x + 1) + 2(x^2 + 2) + 3(x^3 + 3) + 4(x^4 + 4) + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1000^3 - 597^3 - 99^3 - 17^3 - 29^2 + 4$ за $x = 111$.
13. Вредност x-а из једначине $200x = 32$.
16. 73^2. 18. $\frac{\pi}{10}$.
20. Највећи троцифрен број.
22. Троструки број смањен за 5 даје исто толико као кад двоструки тај број повећамо за 7.
24. Број који показује колико је година живео Леонард Ојлер (Euler), велики швајцарски математичар.



КУПОН ЗА МАТ. УКРШТЕНИЦУ

Име и презиме: .....

.....

Разред и школа: .....

Место: .....

Решење (уз прилог испуњеног купона) послати до 31 марта 1957. На куверти назначити: „Математичка укрштеница". Између ученика који исправно реше укрштеницу, ждребом ће се извући њих 10 и наградити математичким књигама. Решење укрштенице и имена награђених објавиће се у наредном броју.

Za vrijeme štampanja lista stigla su ova rješenja:

Begović Fehim, uč. 6b r. g. Doboj, 236$_8$; *Васковарџић Р. Станко*, уч. 7$_1$ р. г. Трстеник, 229, 236; *Врачарић Мирјана*, уч. 6$_1$ р. г. Сомбор, 230; *Grgić Josip*, uč. 6c r. g. Nova Gradiška, 236; *Grob Ilona*, uč. 5$_3$ r. g. Zrenjanin, 233, 236; *Ражкатовић Зарија*, уч. 6$_3$ р. г. Трстеник, 229, 236; *Virgonc Irena*, uč. 5$_3$ r. g. Zrenjanim 233, 226; *Žerjav Tone*, uč. 8b r. g. Brežice, 126, 127, 128, 129.

Rješenja, dopise i članke slati na Uredništvo »Matem.-fiz. lista«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.

Svim suradnicima!

Molimo sve suradnike, da crteže uz članke izrađuju uredno, pregledno i točno, po mogućnosti tušem na posebnom papiru.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, gimnaziju i mjesto. Nečitljiva i neuredna rješenja ne će se uopće uzeti u obzir.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.

Rješenja zadataka iz ovog broja poslati najkasnije do 1. IV.

Savez Društava matematičara i fizičara FNRJ izdaje časopis

NASTAVA MATEMATIKE I FIZIKE

Pretplata iznosi za članove društava matematičara i fizičara 300 Din, a za škole i biblioteke 400 Din. Pretplatu i narudžbe slati izdavačkom poduzeću »Nolit«, Beograd, Narod. fronta 76, na ček. račun br. 1031-T-627 sa naznakom za časopis »Nastava mat. i fiz.« ili na žiro račun »Nastave matematike i fizike« 10-KB-2-Ž-1262

Za Narodnu Republiku Hrvatsku pretplata se šalje na ček. upl. 40-KB-6-Ž-1133 ili uputnicom Hrv. prirodosl. društvo, Zagreb, Ilica 16/III. kat uz naznaku da je za »Nastavu«

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE IZDAJE ČASOPIS

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

Pretplata za 1956. godinu iznosi Din 480 i šalje se na administraciju GLASNIKA: Hrvatsko prirodoslovno društvo — Zagreb, Ilica 16/III.

Čekovni račun 40-KB-6-Ž-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH

Godišnja članarina za društvo je Din 240. — Članovi primaju Glasnik uz nadoplatu Din 240